平成 31 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

1 xy 平面において，連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad 2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$$

の表す領域を D とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

2 p を実数の定数とする．x の 2 次方程式

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この 2 次方程式は実数解をもつことを示せ．

(2) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ．

3 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える．S_1 と S_2 の共通部分を C とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ．

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ．

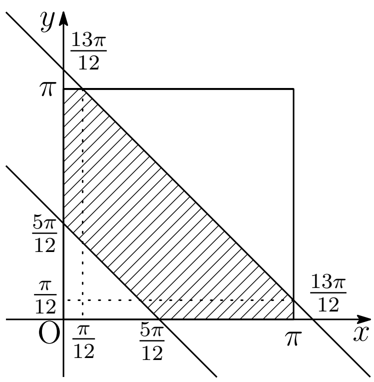
解答例

1 (1) $2\sin(x+y)-2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$ より

$$\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ より，
$0 \leqq x+y \leqq 2\pi$ に注意して

$$\frac{\pi}{6} \leqq x+y-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{6}$$



したがって，D の表す不等式は

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad \frac{5\pi}{12} \leqq x+y \leqq \frac{13\pi}{12}$$

よって，領域 D は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(2) $2x+y=k$ とおくと　$y=-2x+k$
これは，傾き -2，切片 k の直線を表す．
D において，k が最大・最小となるのは，それぞれ

$$x=\pi, \quad y=\frac{\pi}{12} \text{のとき　最大値 } \boldsymbol{\frac{25}{12}\pi}$$
$$x=0, \quad y=\frac{5\pi}{12} \text{のとき　最小値 } \boldsymbol{\frac{5}{12}\pi}$$

2 (1) 2 次方程式

$$x^2-(2p+|p|-|p+1|+1)x+\frac{1}{2}(2p+3|p|-|p+1|-1)=0 \quad \cdots(*)$$

において

$$|p| = \begin{cases} p & (p \geqq 0) \\ -p & (p < 0) \end{cases} \qquad |p+1| = \begin{cases} p+1 & (p \geqq -1) \\ -p-1 & (p < -1) \end{cases}$$

したがって，次の (i)〜(iii) の場合分けを行う．

(i) $p < -1$ のとき，2 次方程式 $(*)$ は

$$x^2 - (2p+2)x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0,\ 2p+2$$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は実数解をもつ．

(ii) $-1 \leqq p < 0$ のとき，2 次方程式 $(*)$ は

$$x^2 - p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{p+1} \quad (p+1 \geqq 0)$$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は実数解をもつ ($p = -1$ のとき重解)．

(iii) $0 \leqq p$ のとき，2 次方程式 $(*)$ は

$$x^2 - 2px + 2p - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x-2p+1) = 0$$

これを解いて　$x = 1,\ 2p-1$

このとき，2 次方程式 $(*)$ は実数解をもつ ($p = 1$ のとき重解)．

(i)〜(iii) より，2 次方程式 $(*)$ は，実数解をもつ．

(2) (1) の結果と同じ場合分けを行う．

i) $p < -1$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0^2 + (2p+2)^2 \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (2p+1)(2p+3) \leqq 0$$

このとき，$p < -1$ に注意して　$-\dfrac{3}{2} \leqq p < -1$

ii) $-1 \leqq p < 0$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\sqrt{p+1})^2 + (-\sqrt{p+1})^2 < 1 \quad \text{ゆえに} \quad p \leqq -\frac{1}{2}$$

このとき，$-1 \leqq p < 0$ に注意して　$-1 \leqq p \leqq -\dfrac{1}{2}$

iii) $0 \leqq p$ のとき

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1^2 + (2p-1)^2 \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad (2p-1)^2 \leqq 0$$

このとき，$0 \leqq p$ に注意して　$p = \dfrac{1}{2}$

i)〜iii) において $p \neq -1,\ 1$ であることに注意して

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq p < -1,\ \ -1 < p \leqq -\frac{1}{2},\quad p = \frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$
$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

の中心は，それぞれ $(1,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 3,\ 3)$ であり，この 2 点間の距離は

$$\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = 3$$

また，S_1，S_2 の半径は，それぞれ $\sqrt{7}$，1 より

$$\sqrt{7} - 1 < 3 < \sqrt{7} + 1$$

したがって，S_1 と S_2 の共通部分 C は円である．S_1 と S_2 の方程式から $x^2+y^2+z^2$ の項を消去すると，円 C が存在する次の平面の方程式を得る．

$$2x + 4y + 4z - 25 = 0$$

これから，S_1 との共通部分が C となる球面の方程式は，実数 k を用いて

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 7 + k(2x + 4y + 4z - 25) = 0$$
$$(x+k-1)^2 + (y+2k-1)^2 + (z+2k-1)^2 = 9k^2 + 15k + 7 \quad \cdots (*)$$

ゆえに　$9k^2 + 15k + 7 = 9\left(k + \dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

球面の半径が最小になるのは，$k = -\dfrac{5}{6}$ ときで，その方程式は

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}}$$

(2) 球面の半径が $\sqrt{3}$ になるとき　$9k^2 + 15k + 7 = 3$

ゆえに　$(3k+1)(3k+4) = 0$　これを解いて　$k = -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}$

上の結果を $(*)$ に代入することにより，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = 3,}$$
$$\boldsymbol{\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 = 3}$$