平成30年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学　数I・II・A・B

1 関数 $f(t) = (\sin t - \cos t)\sin 2t$ を考える．

(1) $x = \sin t - \cos t$ とおくとき，$f(t)$ を x を用いて表せ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

2 1個のさいころを3回投げる試行において，1回目に出る目を a，2回目に出る目を b，3回目に出る目を c とする．

(1) $\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = 0$ である確率を求めよ．

(2) a，b が2以上かつ $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ．

3 座標空間に6点

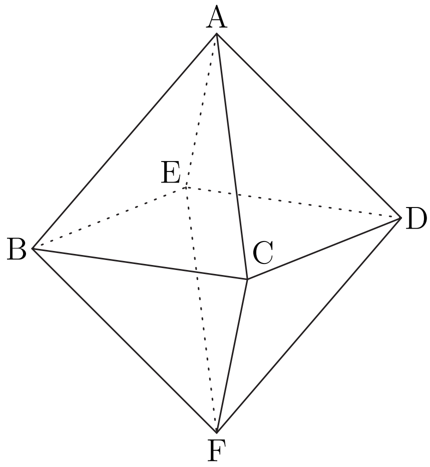
$$\mathrm{A}(0,0,1),\ \mathrm{B}(1,0,0),\ \mathrm{C}(0,1,0),\ \mathrm{D}(-1,0,0),\ \mathrm{E}(0,-1,0),\ \mathrm{F}(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体ABCDEFがある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ を満たす実数とする．線分AB，ACをそれぞれ $1-s : s$ に内分する点をP，Qとし，線分FD，FEをそれぞれ $1-t : t$ に内分する点をR，Sとする．

(1) 4点P，Q，R，Sが同一平面上にあることを示せ．

(2) 線分PQの中点をLとし，線分RSの中点をMとする．s，t が $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ の範囲を動くとき，線分LMの長さの最小値 m を求めよ．

(3) 正八面体ABCDEFの4点P，Q，R，Sを通る平面による切り口の面積を X とする．線分LMの長さが(2)の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ．



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x = \sin t - \cos t$ より

$$x^2 = 1 - 2\sin t\cos t = 1 - \sin 2t \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2t = 1 - x^2$$

よって　$f(t) = (\sin t - \cos t)\sin 2t = x(1 - x^2) = \boldsymbol{-x^3 + x}$

(2) $x = \sin t - \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $(0 \leqq t \leqq \pi)$

$$-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$$

$y = -x^3 + x$ とすると $(-1 \leqq x \leqq \sqrt{2})$

$$y' = -3x^2 + 1 = -3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$，最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = \int_a^c (x-a)\{(x-a)+(a-b)\}\,dx$

$$= \int_a^c (x-a)^2\,dx + (a-b)\int_a^c (x-a)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(c-a)^3 + \frac{1}{2}(a-b)(c-a)^2$$

$$= \frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)$$

$\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = 0$ であるとき　$(c-a)^2(a-3b+2c)=0$

したがって　　$a=c$　または　$a+2c=3b$

(i) $a=c$ のとき　6^2 通り

(ii) $a+2c=3b$ のとき，次の 12 通り

$b=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$

$b=2$ のとき　$(a,\ c)=(4,\ 1),\ (2,\ 2)$

$b=3$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 2),\ (3,\ 3),\ (1,\ 4)$

$b=4$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3),\ (4,\ 4),\ (2,\ 5)$

$b=5$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 5),\ (3,\ 6)$

$b=6$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 6)$

(iii) $a=c$ かつ $a+2c=3b$ すなわち $a=b=c$ のとき　6 通り

(i)〜(iii) より，求める確率は　　$\dfrac{6^2+12-6}{6^3} = \mathbf{\dfrac{7}{36}}$

(2) $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ より　$2\log_a b - 2\log_a c + \dfrac{\log_a c}{\log_a b} = 1$

ゆえに　　$(2\log_a b - 1)(\log_a b - \log_a c) = 0$

したがって　$a = b^2$　または　$b = c$　$(a \geqq 2,\ b \geqq 2)$

(i) $a = b^2$ のとき　次の 6 通り

$$(a,\ b,\ c) = (4,\ 2,\ i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(ii) $b = c$ のとき　次の 5^2 通り

$$(a,\ b,\ c) = (j,\ k,\ k) \quad (j, k = 2, 3, 4, 5, 6)$$

(iii) $a = b^2$ かつ $b = c$ すなわち $(a,\ b,\ c) = (4,\ 2,\ 2)$ の 1 通り

(i)〜(iii) より，求める確率は　　$\dfrac{6 + 5^2 - 1}{6^3} = \mathbf{\dfrac{5}{36}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a} = (0, 0, 1)$，$\vec{b} = (1, 0, 0)$，$\vec{c} = (0, 1, 0)$ とすると，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(-\vec{b})$，$\mathrm{E}(-\vec{c})$，$\mathrm{F}(-\vec{a})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{SR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b}+\vec{c})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \left(\dfrac{s+t-2}{2},\ \dfrac{s+t-2}{2}, -(s+t)\right)$

ここで，$s+t=2u$ とおくと $(0<u<1)$　$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (u-1,\ u-1, -2u)$

$$m^2 = |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|^2 = (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2$$
$$= 6u^2 - 4u + 2 = 6\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

よって，$u = \dfrac{1}{3}$，すなわち，$s+t = \dfrac{2}{3}$ のとき，m は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると，$\vec{a}$ の係数に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{t\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{s+t} = \frac{t(1-s)+s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

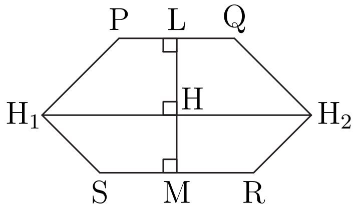
したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b}+\vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b}+\vec{c})$$

$s+t = \dfrac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{HL}} = s(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (s,\ s,\ s),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = (-t, -t, -t)$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{HL}}| = \sqrt{3}s$，$|\overrightarrow{\mathrm{HM}}| = \sqrt{3}t$



平面 PQRS と線分 BE，CD のとの交点をそれぞれ H_1，H_2 とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = (1-s)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-s)\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{\mathrm{SR}}| = (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = (1-t)\sqrt{2}$

X は 2 つの台形 $\mathrm{PH_1H_2Q}$，$\mathrm{H_1SRH_2}$ の和であるから

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}(\mathrm{PQ} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HL} + \frac{1}{2}(\mathrm{SR} + \mathrm{H_1H_2})\mathrm{HM} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}s + \frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\}\sqrt{3}t \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s^2+t^2)\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\{4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{4\cdot\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (s-t)^2\right\} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left\{\frac{20}{9} - (s-t)^2\right\}
\end{aligned}$$

よって，$s-t=0$，すなわち，$s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき，X は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}}{9}}$