

平成30年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 関数 $f(t) = (\sin t - \cos t) \sin 2t$ を考える.

- (1) $x = \sin t - \cos t$ とおくとき, $f(t)$ を x を用いて表せ.
- (2) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき, $f(t)$ の最大値と最小値を求めよ.

2 1個のさいころを3回投げる試行において, 1回目に出る目を a , 2回目に出る目を b , 3回目に出る目を c とする.

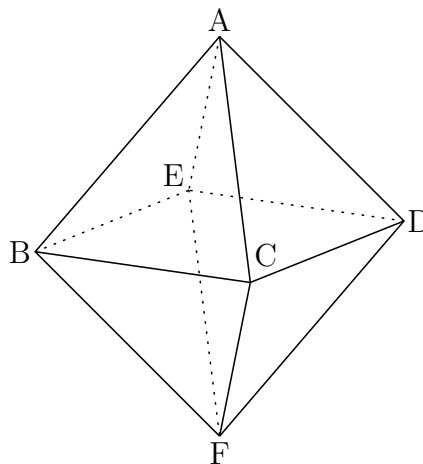
- (1) $\int_a^c (x-a)(x-b) dx = 0$ である確率を求めよ.
- (2) a, b が2以上かつ $2 \log_a b - 2 \log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ.

3 座標空間に6点

$$A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-1, 0, 0), E(0, -1, 0), F(0, 0, -1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とする. 線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし, 線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする.

- (1) 4点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ.
- (2) 線分 PQ の中点を L とし, 線分 RS の中点を M とする. s, t が $0 < s < 1, 0 < t < 1$ の範囲を動くとき, 線分 LM の長さの最小値 m を求めよ.
- (3) 正八面体 ABCDEF の4点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする. 線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき, X を最大とするような s, t の値と, そのときの X の値を求めよ.



解答例

1 (1) $x = \sin t - \cos t$ より

$$x^2 = 1 - 2 \sin t \cos t = 1 - \sin 2t \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2t = 1 - x^2$$

$$\text{よって} \quad f(t) = (\sin t - \cos t) \sin 2t = x(1 - x^2) = -x^3 + x$$

(2) $x = \sin t - \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ より ($0 \leq t \leq \pi$)

$$-1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$y = -x^3 + x$ とすると ($-1 \leq x \leq \sqrt{2}$)

$$y' = -3x^2 + 1 = -3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	$\sqrt{2}$
y'		-	0	+	0	-	
y	0	\searrow	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	\nearrow	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	\searrow	$-\sqrt{2}$

よって 最大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 最小値 $-\sqrt{2}$ ■

$$\begin{aligned}
 \boxed{2} \quad (1) \quad \int_a^c (x-a)(x-b) dx &= \int_a^c (x-a)\{(x-a) + (a-b)\} dx \\
 &= \int_a^c (x-a)^2 dx + (a-b) \int_a^c (x-a) dx \\
 &= \frac{1}{3}(c-a)^3 + \frac{1}{2}(a-b)(c-a)^2 \\
 &= \frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)
 \end{aligned}$$

$$\int_a^c (x-a)(x-b) dx = 0 \text{ であるとき } (c-a)^2(a-3b+2c) = 0$$

したがって $a = c$ または $a + 2c = 3b$

(i) $a = c$ のとき 6^2 通り

(ii) $a + 2c = 3b$ のとき, 次の 12 通り

$$b = 1 \text{ のとき } (a, c) = (1, 1)$$

$$b = 2 \text{ のとき } (a, c) = (4, 1), (2, 2)$$

$$b = 3 \text{ のとき } (a, c) = (5, 2), (3, 3), (1, 4)$$

$$b = 4 \text{ のとき } (a, c) = (6, 3), (4, 4), (2, 5)$$

$$b = 5 \text{ のとき } (a, c) = (5, 5), (3, 6)$$

$$b = 6 \text{ のとき } (a, c) = (6, 6)$$

(iii) $a = c$ かつ $a + 2c = 3b$ すなわち $a = b = c$ のとき 6 通り

$$(i) \sim (iii) \text{ より, 求める確率は } \frac{6^2 + 12 - 6}{6^3} = \frac{7}{36}$$

$$(2) \quad 2 \log_a b - 2 \log_a c + \log_b c = 1 \quad \text{より} \quad 2 \log_a b - 2 \log_a c + \frac{\log_a c}{\log_a b} = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad (2 \log_a b - 1)(\log_a b - \log_a c) = 0$$

$$\text{したがって} \quad a = b^2 \quad \text{または} \quad b = c \quad (a \geq 2, b \geq 2)$$

(i) $a = b^2$ のとき 次の 6 通り

$$(a, b, c) = (4, 2, i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(ii) $b = c$ のとき 次の 5^2 通り

$$(a, b, c) = (j, k, k) \quad (j, k = 2, 3, 4, 5, 6)$$

(iii) $a = b^2$ かつ $b = c$ すなわち $(a, b, c) = (4, 2, 2)$ の 1 通り

$$(i) \sim (iii) \text{ より, 求める確率は } \frac{6 + 5^2 - 1}{6^3} = \frac{5}{36} \quad \blacksquare$$

3 (1) $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 0)$, $\vec{c} = (0, 1, 0)$ とすると, $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(-\vec{b})$, $E(-\vec{c})$, $F(-\vec{a})$ であるから

$$\vec{OP} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}, \quad \vec{OQ} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c},$$

$$\vec{OR} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{b}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{b},$$

$$\vec{OS} = t(-\vec{a}) + (1-t)(-\vec{c}) = -t\vec{a} + (t-1)\vec{c}$$

$$\text{したがって} \quad \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (1-s)(\vec{c} - \vec{b}) = (1-s)\vec{BC}$$

$$\vec{SR} = \vec{OR} - \vec{OS} = (t-1)(\vec{b} - \vec{c}) = (1-t)\vec{BC}$$

$\vec{PQ} // \vec{SR}$ であるから, 4点 P, Q, R, S は同一平面上にある.

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\vec{OL} &= \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{OM} &= \frac{\vec{OR} + \vec{OS}}{2} = -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{LM} &= \vec{OM} - \vec{OL} = -(s+t)\vec{a} + \frac{1}{2}(s+t-2)(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

ゆえに $\vec{LM} = \left(\frac{s+t-2}{2}, \frac{s+t-2}{2}, -(s+t) \right)$

ここで, $s+t = 2u$ とおくと ($0 < u < 1$) $\vec{LM} = (u-1, u-1, -2u)$

$$\begin{aligned}m^2 &= |\vec{LM}|^2 = (u-1)^2 + (u-1)^2 + (-2u)^2 \\ &= 6u^2 - 4u + 2 = 6 \left(u - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって, $u = \frac{1}{3}$, すなわち, $s+t = \frac{2}{3}$ のとき, m は最小値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) 直線 LM と xy 平面との交点を H とすると, \vec{a} の係数に注意して

$$\vec{OH} = \frac{t\vec{OL} + s\vec{OM}}{s+t} = \frac{t(1-s) + s(t-1)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{HL} &= \vec{OL} - \vec{OH} = s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + \frac{s(2-s-t)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{HM} &= -t\vec{a} + \frac{1}{2}(t-1)(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{t-s}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -t\vec{a} + \frac{t(s+t-2)}{2(s+t)}(\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$s+t = \frac{2}{3}$ を上の 2 式に代入すると

$$\begin{aligned}\vec{HL} &= s(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (s, s, s), \\ \vec{HM} &= -t(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (-t, -t, -t)\end{aligned}$$

ゆえに $|\vec{HL}| = \sqrt{3}s$, $|\vec{HM}| = \sqrt{3}t$

平面 PQRS と線分 BE, CD のとの交点を
それぞれ H_1, H_2 とすると

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{BC}$$

ゆえに $|\overrightarrow{H_1H_2}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$

(1) の結果から $|\overrightarrow{PQ}| = (1-s)|\overrightarrow{BC}| = (1-s)\sqrt{2}$,

$$|\overrightarrow{SR}| = (1-t)|\overrightarrow{BC}| = (1-t)\sqrt{2}$$

X は 2 つの台形 PH_1H_2Q , H_1SRH_2 の和であるから

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(PQ + H_1H_2)HL + \frac{1}{2}(SR + H_1H_2)HM \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}s + \frac{1}{2} \left\{ (1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2} \right\} \sqrt{3}t \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}(2-s)s + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-t)t = \frac{\sqrt{6}}{2} \{ 2(s+t) - (s^2 + t^2) \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \{ 4(s+t) - (s+t)^2 - (s-t)^2 \} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ 4 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 - (s-t)^2 \right\} = \frac{\sqrt{6}}{4} \left\{ \frac{20}{9} - (s-t)^2 \right\} \end{aligned}$$

よって, $s-t=0$, すなわち, $s=t=\frac{1}{3}$ のとき, X は最大値 $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ ■

