平成29年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学　数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 b，c を実数，q を正の実数とする．放物線 $P : y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ．

2 実数 x，y，z が

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 5$$

を満たすとする．

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ．

(2) $z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 放物線 $y=-x^2+bx+c$ のグラフの頂点の y 座標 q は

$$q=-\frac{b^2-4\cdot(-1)c}{4\cdot(-1)}=\frac{b^2+4c}{4}$$

2 次方程式 $-x^2+bx+c=0$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$　$\alpha+\beta=b$　$\alpha\beta=-c$

ゆえに　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=b^2+4c=4q$　したがって　$\beta-\alpha=2\sqrt{q}$

よって　$S=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(2\sqrt{q})^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}q\sqrt{q}}$

別解 放物線の頂点を $(p,\ q)$ とすると，x^2 の係数に注意して

$$y=-(x-p)^2+q$$

とおく．この放物線の x 軸との共有点の x 座標は

$$-(x-p)^2+q=0\quad \text{これを解いて}\quad x=p\pm\sqrt{q}$$

よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{6}\{(p+\sqrt{q})-(p-\sqrt{q})\}^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}q\sqrt{q}}$$

■

2 (1) $\begin{cases} x+y=1-z \\ x+2y=5-3z \end{cases}$ ゆえに $(*)\begin{cases} x=z-3 \\ y=-2z+4 \end{cases}$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,
$x+y+z=1$ より

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\ &= (z-3)^2+(-2z+4)^2+z^2 \\ &\qquad -(z-3)(-2z+4)-(-2z+4)z-z(z-3) \\ &= 9z^2-33z+37 \\ &= 9\left(z-\frac{11}{6}\right)+\frac{27}{4}\end{aligned}$$

よって　$z=\dfrac{11}{6}$ で，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$ をとる．

(2) $(*)$ より　$xyz=(z-3)(-2z+4)z$
$=-2z^3+10z^2-12z$

$f(z)=-2z^3+10z^2-12z$ とおくと $(z \geqq 0)$

$$f'(z)=-6z^2+20z-12=-2(3z^2-10z+6)$$

$f'(z)=0$ とすると　$z=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(z)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f(2)=f(3)=0$，$2<\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}<3$ であるから，上の増減表により，xyz が最大となる z の値は

$$\boldsymbol{z=\frac{5+\sqrt{7}}{3}}$$

補足 $f(z)=f'(z)\left(\dfrac{1}{3}z-\dfrac{5}{9}\right)+\dfrac{4}{9}(7z-15)$ より

$$f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{4}{9}\left(7\times\frac{5+\sqrt{7}}{3}-15\right)=\frac{4}{27}(7\sqrt{7}-10)>0$$

■

3 (1) $a_{n+1} = 8{a_n}^2 \cdots (*)$ より　$a_n > 0$ のとき，$a_{n+1} > 0$

$a_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n > 0$

$(*)$ の両辺を底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 3$$

よって　$\boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n + 3}$

(2) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$，(1) の結果から　$b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

数列 $\{b_n + 3\}$ は，初項 $b_1 + 3 = 4$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 3 = 4{\cdot}2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_n = 2^{n+1} - 3}$$

(3) $P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ より

$$\begin{aligned}\log_2 P_n = \log_2 a_1a_2a_3\cdots a_n &= \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1} - 3) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n \\ &= 2^{n+2} - 3n - 4 \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}}$

(4) $P_n > 10^{100}$ より　$\log_2 P_n > \log_2 10^{100} = 100\log_2 10$

$(*)$ より　$2^{n+2} - 3n - 4 > 100\log_2 10$

ここで　$\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16$ より　$300 < 100\log_2 10 < 400$

また，$q_n = 2^{n+2} - 3n - 4$ とおくと $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$q_{n+1} - q_n = (2^{n+3} - 3n - 7) - (2^{n+2} - 3n - 4) = 2^{n+2} - 3 > 0$$

$\{q_n\}$ は単調増加列であることに注意して

$$q_6 = 2^8 - 3{\cdot}6 - 4 = 234, \quad q_7 = 2^9 - 3{\cdot}7 - 4 = 487$$

よって，求める最小の自然数 n は　**7**　■