

平成29年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

1 b, c を実数, q を正の実数とする. 放物線 $P: y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき, 放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いてあらわせ.

2 実数 x, y, z が

$$x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 5$$

を満たすとする.

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ.

(2) $z \geq 0$ のとき, xyz が最大となる z の値を求めよ.

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく. b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく. 数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ.

解答例

1 放物線 $y = -x^2 + bx + c$ のグラフの頂点の y 座標 q は

$$q = -\frac{b^2 - 4 \cdot (-1)c}{4 \cdot (-1)} = \frac{b^2 + 4c}{4}$$

2次方程式 $-x^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$) $\alpha + \beta = b$ $\alpha\beta = -c$

ゆえに $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 + 4c = 4q$ したがって $\beta - \alpha = 2\sqrt{q}$

よって $S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3 = \frac{4}{3}q\sqrt{q}$

別解 放物線の頂点を (p, q) とすると, x^2 の係数に注意して

$$y = -(x - p)^2 + q$$

とおく. この放物線の x 軸との共有点の x 座標は

$$-(x - p)^2 + q = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = p \pm \sqrt{q}$$

よって, 求める面積 S は

$$S = \frac{1}{6}\{(p + \sqrt{q}) - (p - \sqrt{q})\}^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3 = \frac{4}{3}q\sqrt{q}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \begin{cases} x + y = 1 - z \\ x + 2y = 5 - 3z \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} x = z - 3 \\ y = -2z + 4 \end{cases}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx),$$

$$x + y + z = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\ &= (z - 3)^2 + (-2z + 4)^2 + z^2 \\ &\quad - (z - 3)(-2z + 4) - (-2z + 4)z - z(z - 3) \\ &= 9z^2 - 33z + 37 \\ &= 9 \left(z - \frac{11}{6} \right) + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

よって $z = \frac{11}{6}$ で、最小値 $\frac{27}{4}$ をとる.

$$(2) \quad (*) \text{ より} \quad \begin{aligned} xyz &= (z - 3)(-2z + 4)z \\ &= -2z^3 + 10z^2 - 12z \end{aligned}$$

$$f(z) = -2z^3 + 10z^2 - 12z \text{ とおくと } (z \geq 0)$$

$$f'(z) = -6z^2 + 20z - 12 = -2(3z^2 - 10z + 6)$$

$$f'(z) = 0 \text{ とすると } z = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$

z	0	...	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$...	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$...
$f'(z)$		-	0	+	0	-
$f(z)$	0	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow

$f(2) = f(3) = 0$, $2 < \frac{5 + \sqrt{7}}{3} < 3$ であるから、上の増減表により、 xyz が最大となる z の値は

$$z = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$$

補足 $f(z) = f'(z) \left(\frac{1}{3}z - \frac{5}{9} \right) + \frac{4}{9}(7z - 15)$ より

$$f \left(\frac{5 + \sqrt{7}}{3} \right) = \frac{4}{9} \left(7 \times \frac{5 + \sqrt{7}}{3} - 15 \right) = \frac{4}{27}(7\sqrt{7} - 10) > 0$$

- 3** (1) $a_{n+1} = 8a_n^2 \cdots (*)$ より $a_n > 0$ のとき, $a_{n+1} > 0$
 $a_1 = 2$ であるから, すべての自然数 n について $a_n > 0$
 $(*)$ の両辺を底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 3$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{b_{n+1} = 2b_n + 3}$$

- (2) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$, (1) の結果から $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$
 数列 $\{b_n + 3\}$ は, 初項 $b_1 + 3 = 4$, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \mathbf{b_n = 2^{n+1} - 3}$$

- (3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ より

$$\begin{aligned} \log_2 P_n &= \log_2 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = \sum_{k=1}^n \log_2 a_k = \sum_{k=1}^n b_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 3) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n \\ &= 2^{n+2} - 3n - 4 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{P_n = 2^{2^{n+2}} - 3n - 4}$$

- (4) $P_n > 10^{100}$ より $\log_2 P_n > \log_2 10^{100} = 100 \log_2 10$

$$(*) \text{ より } 2^{n+2} - 3n - 4 > 100 \log_2 10$$

$$\text{ここで } \log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16 \text{ より } 300 < 100 \log_2 10 < 400$$

$$\text{また, } q_n = 2^{n+2} - 3n - 4 \text{ とおくと } (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$q_{n+1} - q_n = (2^{n+3} - 3n - 7) - (2^{n+2} - 3n - 4) = 2^{n+2} - 3 > 0$$

$\{q_n\}$ は単調増加列であることを注意して

$$q_6 = 2^8 - 3 \cdot 6 - 4 = 234, \quad q_7 = 2^9 - 3 \cdot 7 - 4 = 487$$

よって, 求める最小の自然数 n は **7**