

平成28年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 次の問いに答えよ.

(1) a を正の実数とし, k を1以上の実数とする. x についての2次方程式

$$x^2 - kax + a - k = 0$$

は, 不等式

$$-\frac{1}{a} < s \leq 1$$

をみたすような実数解 s をもつことを示せ.

(2) a を3以上の整数とする. $n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるような2以上のすべての整数 n を a を用いて表せ.

2 曲線 $C: y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - 2x$ を考える.

(1) C と直線 $L: y = -x + t$ が異なる4点で交わるような t の値の範囲を求めよ.

(2) C と L が異なる4点で交わり, その交点を x 座標が小さいものから順に P_1, P_2, P_3, P_4 とするとき,

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 4$$

となるような t の値を求めよ.

(3) t が(2)の値をとるとき, C と線分 P_2P_3 で囲まれる図形の面積を求めよ.

3 1以上6以下の2つの整数 a, b に対し, 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める.

$$(ア) \quad f_1(x) = \sin(\pi x)$$

$$(イ) \quad f_{2n}(x) = f_{2n-1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(ウ) \quad f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ.

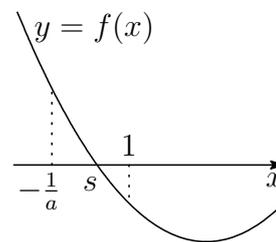
(1) $a = 2, b = 3$ のとき, $f_5(0)$ を求めよ.

(2) 1個のさいころを2回投げて, 1回目に出る目を a , 2回目に出る目を b とするとき, $f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^2 - kax + a - k$ とおくと ($a > 0, k \geq 1$)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{a}\right) &= \frac{1}{a^2} + a > 0, \\ f(1) &= 1 - ka + a - k \\ &= (1+a)(1-k) \leq 0 \end{aligned}$$



$f(s) = 0$ をみたく $-\frac{1}{a} < s \leq 1$ が存在する. よって, x に関する 2 次方程式 $x^2 - kax + a - k = 0$ は解 s ($-\frac{1}{a} < s \leq 1$) をもつ.

- (2) $n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるとき (a は 3 以上の整数, n は 2 以上の整数), $k = \frac{n^2 + a}{an + 1}$ とおくと, k は 1 以上の整数で, 次式が成り立つ.

$$n^2 - kan + a - k = 0$$

これから, n は 2 次方程式

$$f(x) = 0 \quad \dots (*)$$

の解の 1 つである. したがって, (1) で示した s と n は (*) の解であるから, 解と係数の関係により

$$s + n = ka \quad \text{ゆえに} \quad s = ka - n \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき, $ka - n$ は整数であるから, s は整数でその値の範囲から

$$s = 0 \quad \text{または} \quad s = 1$$

0 が (*) の解であるとき, $f(0) = a - k = 0$ より $k = a$

1 が (*) の解であるとき, $f(1) = (1+a)(1-k) = 0$ より $k = 1$

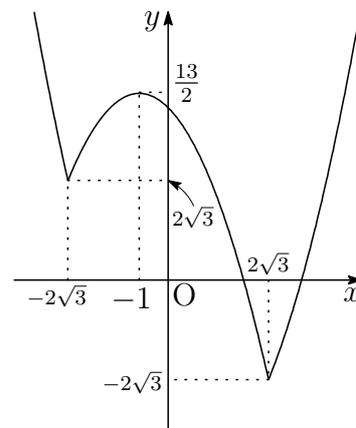
① より $(s, k) = (0, a)$ のとき $n = a^2$

$(s, k) = (1, 1)$ のとき $n = a - 1$

よって $n = a^2, a - 1$ ■

- 2 (1) $C: y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - 2x$ と $L: y = -x + t$ の
2式から y を消去すると $\left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - x = t$
 $y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - x \cdots (*)$ のグラフは

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} & (|x| \geq 2\sqrt{3}) \\ -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} & (|x| \leq 2\sqrt{3}) \end{cases}$$



C と L が異なる 4 点で交わるのは, $(*)$ と直線 $y = t$ は異なる 4 点で交わるときであるから

$$2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}$$

- (2) x_1, x_4 は $(x_1 < x_4)$

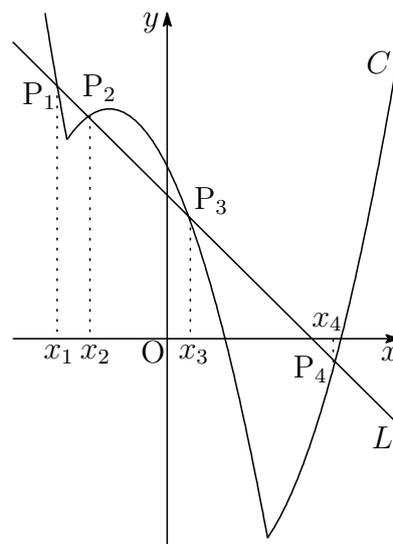
$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} = t$$

$$\begin{aligned} \text{これを解いて } x_1 &= 1 - \sqrt{13+2t} \\ x_4 &= 1 + \sqrt{13+2t} \end{aligned}$$

また, x_2, x_3 は $(x_2 < x_3)$

$$-\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} = t$$

$$\begin{aligned} \text{これを解いて } x_2 &= -1 - \sqrt{13-2t} \\ x_3 &= -1 + \sqrt{13-2t} \end{aligned}$$



直線 L の傾きは -1 であるから

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2}(x_2 - x_1), \quad |\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{2}(x_3 - x_2), \quad |\overrightarrow{P_3P_4}| = \sqrt{2}(x_4 - x_3)$$

これらを $\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 4$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{2}(x_2 - x_1) + \sqrt{2}(x_4 - x_3)}{\sqrt{2}(x_3 - x_2)} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2)$$

したがって $\sqrt{13+2t} = 5\sqrt{13-2t}$ これを解いて $t = 6$

(3) (2)の結果から, $t = 6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$. 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \left\{ -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} - (-x+6) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 x(x+2) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \{0 - (-2)\}^3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

- 3** (1) (ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$
 (イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
 (ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } f_{2n+1}(x) &= f_{2n}(-x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - (-x)\right) \\ &= f_{2n-1}\left(x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

したがって $f_5(x) = f_1\left(x + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)$
 よって, $a = 2$, $b = 3$ のとき, $x = 0$ とすると

$$f_5(0) = f_1\left(\frac{5}{3}\right) = \sin \frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (2) (**) より $f_6(x) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - x\right)$

これに $x = 0$ を代入すると, (ア) により

$$f_6(0) = f_1\left(3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) = \sin 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0) = 0$ となるのは, $3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ が整数になるときで, 次の 8 組.

$$(a, b) = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 3), (6, 6)$$

よって, 求める確率は $\frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$

■