平成28年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) a を正の実数とし，k を1以上の実数とする．x についての2次方程式

$$x^2 - kax + a - k = 0$$

は，不等式

$$-\frac{1}{a} < s \leqq 1$$

をみたすような実数解 s をもつことを示せ．

(2) a を3以上の整数とする．$n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるような2以上のすべての整数 n を a を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $C : y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$ を考える．

(1) C と直線 $L : y = -x + t$ が異なる4点で交わるような t の値の範囲を求めよ．

(2) C と L が異なる4点で交わるとし，その交点を x 座標が小さいものから順に P_1，P_2，P_3，P_4 とするとき，

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}| + |\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|} = 4$$

となるような t の値を求めよ．

(3) t が (2) の値をとるとき，C と線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1以上6以下の2つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア)　$f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

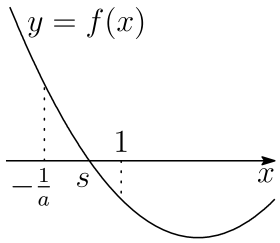
以下の問いに答えよ．

(1) $a = 2$，$b = 3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) 1個のさいころを2回投げて，1回目に出る目を a，2回目に出る目を b とするとき，$f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^2-kax+a-k$ とおくと $(a>0,\ k \geqq 1)$



$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+a>0,$$
$$\begin{aligned} f(1)&=1-ka+a-k \\ &=(1+a)(1-k) \leqq 0 \end{aligned}$$

$f(s)=0$ をみたす $-\frac{1}{a}<s \leqq 1$ が存在する．よって，x に関する 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は解 s $\left(-\frac{1}{a}<s \leqq 1\right)$ をもつ．

(2) n^2+a が $an+1$ で割り切れるとき (a は 3 以上の整数，n は 2 以上の整数)，
$k=\dfrac{n^2+a}{an+1}$ とおくと，k は 1 以上の整数で，次式が成り立つ．

$$n^2-kan+a-k=0$$

これから，n は 2 次方程式

$$f(x)=0 \quad \cdots(*)$$

の解の 1 つである．したがって，(1) で示した s と n は $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$s+n=ka \quad \text{ゆえに} \quad s=ka-n \quad \cdots①$$

このとき，$ka-n$ は整数であるから，s は整数でその値の範囲から

$$s=0 \quad \text{または} \quad s=1$$

0 が $(*)$ の解であるとき，$f(0)=a-k=0$ より　$k=a$

1 が $(*)$ の解であるとき，$f(1)=(1+a)(1-k)=0$ より　$k=1$

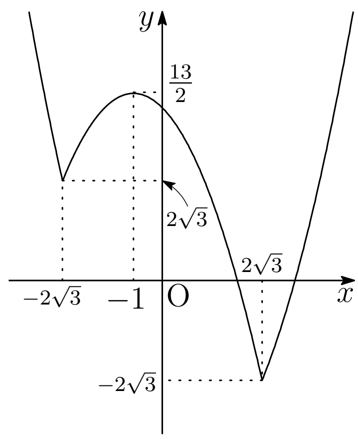
① より　$(s,\ k)=(0,\ a)$ のとき　$n=a^2$
　　　　$(s,\ k)=(1,\ 1)$ のとき　$n=a-1$

よって　　$\boldsymbol{n=a^2,\ a-1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C : y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$ と $L : y = -x + t$ の2式から y を消去すると $\left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - x = t$

$y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - x \cdots (*)$ のグラフは

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} & (|x| \geqq 2\sqrt{3}) \\ -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} & (|x| \leqq 2\sqrt{3}) \end{cases}$$



C と L が異なる4点で交わるのは，$(*)$ と直線 $y = t$ は異なる4点で交わるときであるから

$$\boldsymbol{2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}}$$

(2) x_1，x_4 は $(x_1 < x_4)$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{13}{2} = t$$

これを解いて　$x_1 = 1 - \sqrt{13 + 2t}$

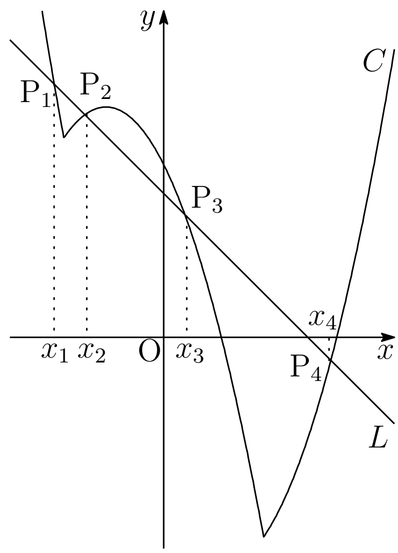
$x_4 = 1 + \sqrt{13 + 2t}$

また，x_2，x_3 は $(x_2 < x_3)$

$$-\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{13}{2} = t$$

これを解いて　$x_2 = -1 - \sqrt{13 - 2t}$

$x_3 = -1 + \sqrt{13 - 2t}$



直線 L の傾きは -1 であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| = \sqrt{2}(x_2 - x_1),\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}| = \sqrt{2}(x_3 - x_2),\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}| = \sqrt{2}(x_4 - x_3)$$

これらを $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}| + |\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}|} = 4$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{2}(x_2 - x_1) + \sqrt{2}(x_4 - x_3)}{\sqrt{2}(x_3 - x_2)} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2)$$

したがって　$\sqrt{13 + 2t} = 5\sqrt{13 - 2t}$　これを解いて　$\boldsymbol{t = 6}$

(3) (2) の結果から，$t=6$，$x_2=-2$，$x_3=0$．求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{13}{2}-(-x+6)\right\}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{0-(-2)\}^3=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) （ア） $f_1(x)=\sin(\pi x)$

（イ） $f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)\qquad (n=1,2,3,\cdots)$

（ウ） $f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)\qquad (n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに $f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)=f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-(-x)\right)$

$$=f_{2n-1}\left(x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\qquad\cdots(*)$$

したがって　$f_5(x)=f_1\left(x+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)$

よって，$a=2$，$b=3$ のとき，$x=0$ とすると

$$f_5(0)=f_1\left(\frac{5}{3}\right)=\sin\frac{5}{3}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $(**)$ より　$f_6(x)=f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-x\right)$

これに $x=0$ を代入すると，(ア) により

$$f_6(0)=f_1\left(3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)=\sin 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\pi$$

$f_6(0)=0$ となるのは，$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ が整数になるときで，次の 8 組.

$$(a,b)=(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2),\ (3,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は　$\frac{8}{6^2}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$