平成 27 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

1 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

2 直線 $\ell : y = kx + m$ $(k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) k と m を求めよ．

(2) 直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

3 平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある．2 点 A，B を除く C 上の点 P に対し，AP = AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる．また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle$AQR の面積を $\theta = \angle$PAB を用いて表せ．

(2) 点 P を動かして $\triangle$AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
=&x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2x\sqrt{1-y^2}\cdot y\sqrt{1-x^2}\\
=&\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geqq 0,\\
&1-(x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\\
=&x^2y^2+(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\\
=&\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって　　$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$

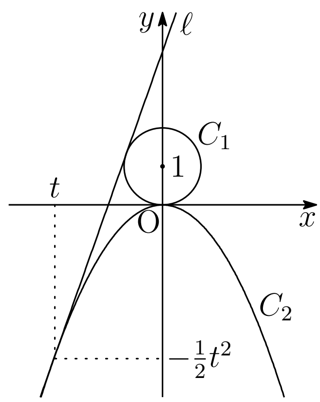
別解 $x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$ とおくと $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
=&x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
=&\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\\
=&(\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha)^2=\sin^2(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

このとき，$0 \leqq \sin^2(\alpha+\beta) \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ を微分すると　$y'=-x$



C_2 上の点 $\left(t, -\dfrac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式は

$$y+\frac{1}{2}t^2=-t(x-t)$$

すなわち　　$y=-tx+\dfrac{1}{2}t^2$

これが ℓ に一致するとき　$k=-t$，$m=\dfrac{1}{2}t^2$

上の 2 式より，$m=\dfrac{1}{2}k^2\cdots$① であるから　　$\ell : kx-y+\dfrac{1}{2}k^2=0$

このとき，C_1 の中心 $(0,\ 1)$ と ℓ の距離が 1 であるから

$$\frac{|-1+\frac{1}{2}k^2|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-1+\frac{1}{2}k^2\right)^2=k^2+1$$

整理すると　$\dfrac{1}{4}k^4-2k^2=0$　ゆえに　$k^2(k^2-8)=0$

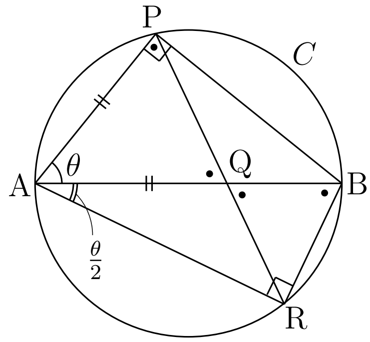
$k>0$ であるから　$\boldsymbol{k=2\sqrt{2}}$　① より　$\boldsymbol{m=4}$

(2) $k=-t$ であるから，(1) の結果より　$t=-2\sqrt{2}$，$\ell : y=2\sqrt{2}x+4$

求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left\{(2\sqrt{2}x+4)-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}}^{0}(x+2\sqrt{2})^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \frac{1}{3}(x+2\sqrt{2})^3\ \Big]_{-2\sqrt{2}}^{0}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}$ より　$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{AQP}$



$\overset{\frown}{\mathrm{AR}}$ の円周角により　$\angle\mathrm{APR}=\angle\mathrm{ABR}$

$\angle\mathrm{AQP}=\angle\mathrm{RQB}$ であるから (対頂角)

$$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{AQP}=\frac{\pi-\theta}{2}$$

ゆえに　$\angle\mathrm{BAR}=\angle\mathrm{BPR}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{2}$

したがって　$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=2\cos\theta$，$\mathrm{BR}=\mathrm{QR}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{AR}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$

よって
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AQR}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR}\sin\angle\mathrm{QAR}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\cos\theta\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin 2\theta}\end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{APQ}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{PQ}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

したがって
$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}&=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}:2\sin\frac{\theta}{2}\\&=2\sin\theta\cos\theta:\sin\theta=2\cos\theta:1\end{aligned}$$

ゆえに，点 R は線分 PQ を $(2\cos\theta+1):1$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(2\cos\theta+1)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(2\cos\theta+1)-1}=-\frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2\cos\theta+1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2\cos\theta}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2\cos\theta+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$\triangle\mathrm{AQR}$ を最大にするとき　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

このとき　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$