平成 26 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 i は虚数単位とし，実数 a，b は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする．
複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_2 とする．

(1) L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ．

(2) L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ．

(3) L_1 と L_2 の交点を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) $\cos x+\cos y\neq 0$ を満たすすべての実数 x，y に対して等式

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) $\cos x+\cos y+\cos z\neq 0$ を満たすすべての実数 x，y，z に対して等式

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$$

は成り立つか．成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を挙げよ．

3 関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，$x=0$ のとき極大値 M をとり，$x=\alpha$ のとき極小値 m をとるという．ただし $\alpha\neq 0$ とする．このとき，p，q，r，s を α，M，m で表せ．

解答例

1 (1) $(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+(bx+ay)i$ であるから，条件より

$$L_1=\{(x,\ y)\mid ax-by=2\},\quad L_2=\{(x,\ y)\mid bx+ay=-3\}$$

$a^2+b^2>0$ であるから，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ より，L_1，L_2 は直線を表す．

(2) 2 直線 $L_1: ax-by=2$，$L_2: bx+ay=-3$ の法線ベクトルをそれぞれ

$$\vec{n}_1=(a,-b),\quad \vec{n}_2=(b,\ a)$$

とおくと，$\vec{n}_1\neq\vec{0}$，$\vec{n}_2\neq\vec{0}$ で

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=ab+(-b)a=0$$

よって，L_1 と L_2 は互いに垂直である．

(3) $\begin{cases} ax-by=2 \\ bx+ay=-3 \end{cases}$ これを解いて $(x,\ y)=\left(\dfrac{\boldsymbol{2a-3b}}{\boldsymbol{a^2+b^2}},\ \dfrac{\boldsymbol{-3a-2b}}{\boldsymbol{a^2+b^2}}\right)$ ■

2 (1)

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$\cos x+\cos y\neq 0$ より，$\cos\dfrac{x-y}{2}\neq 0$ であることに注意して

$$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}=\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x+y}{2}}=\tan\frac{x+y}{2}$$

(2) 成立しない．

反例は，$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ \pi),\ (0,\ \pi,\ \pi),(0,\ 0,\ \frac{\pi}{2}),(0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$ など ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ が $x=0,\ \alpha$ で極値をとるから，x^3 の係数に注意して

$$f'(x)=3px(x-\alpha)=3px^2-3p\alpha x$$

$f(0)=M$ であるから　$f(x)=px^3-\dfrac{3p\alpha}{2}x^2+M \quad \cdots(*)$

また，$f(\alpha)=m$ であるから

$$p\alpha^3-\frac{3p\alpha^3}{2}+M=m \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p=\frac{2(M-m)}{\alpha^3}}$$

$(*)$ より，$q=-\dfrac{3p\alpha}{2}$．上式をこれに代入すると

$$\boldsymbol{q=-\frac{3(M-m)}{\alpha^2}}$$

また，$(*)$ の 1 次の項の係数と定数項から　$\boldsymbol{r=0,\ s=M}$ ■