

平成26年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分  
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

1  $i$ は虚数単位とし、実数  $a, b$ は  $a^2 + b^2 > 0$ を満たす定数とする。  
 複素数  $(a + bi)(x + yi)$ の実部が2に等しいような座標平面上の点  $(x, y)$ 全体の集合を  $L_1$ とし、また  $(a + bi)(x + yi)$ の虚部が  $-3$ に等しいような座標平面上の点  $(x, y)$ 全体の集合を  $L_2$ とする。

- (1)  $L_1$ と  $L_2$ はともに直線であることを示せ。
- (2)  $L_1$ と  $L_2$ は互いに垂直であることを示せ。
- (3)  $L_1$ と  $L_2$ の交点を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1)  $\cos x + \cos y \neq 0$ を満たすすべての実数  $x, y$ に対して等式

$$\tan \frac{x + y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2)  $\cos x + \cos y + \cos z \neq 0$ を満たすすべての実数  $x, y, z$ に対して等式

$$\tan \frac{x + y + z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し、成り立たないときは反例を挙げよ。

3 関数  $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は、 $x = 0$ のとき極大値  $M$ をとり、 $x = \alpha$ のとき極小値  $m$ をとるといふ。ただし  $\alpha \neq 0$ とする。このとき、 $p, q, r, s$ を  $\alpha, M, m$ で表せ。

## 解答例

1 (1)  $(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (bx + ay)i$  であるから、条件より

$$L_1 = \{(x, y) \mid ax - by = 2\}, \quad L_2 = \{(x, y) \mid bx + ay = -3\}$$

$a^2 + b^2 > 0$  であるから、 $(a, b) \neq (0, 0)$  より、 $L_1, L_2$  は直線を表す。

(2) 2直線  $L_1 : ax - by = 2, L_2 : bx + ay = -3$  の法線ベクトルをそれぞれ

$$\vec{n}_1 = (a, -b), \quad \vec{n}_2 = (b, a)$$

とおくと、 $\vec{n}_1 \neq \vec{0}, \vec{n}_2 \neq \vec{0}$  で

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = ab + (-b)a = 0$$

よって、 $L_1$  と  $L_2$  は互いに垂直である。

(3)  $\begin{cases} ax - by = 2 \\ bx + ay = -3 \end{cases}$  これを解いて  $(x, y) = \left( \frac{2a - 3b}{a^2 + b^2}, \frac{-3a - 2b}{a^2 + b^2} \right)$  ■

2 (1)  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$\cos x + \cos y \neq 0$  より、 $\cos \frac{x-y}{2} \neq 0$  であることに注意して

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\cos \frac{x+y}{2}} = \tan \frac{x+y}{2}$$

(2) 成立しない。

反例は、 $(x, y, z) = (0, 0, \pi), (0, \pi, \pi), (0, 0, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  など ■

**3**  $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$  が  $x = 0$ ,  $\alpha$  で極値をとるから,  $x^3$  の係数に注意して

$$f'(x) = 3px(x - \alpha) = 3px^2 - 3p\alpha x$$

$$f(0) = M \text{ であるから } f(x) = px^3 - \frac{3p\alpha}{2}x^2 + M \quad \dots (*)$$

また,  $f(\alpha) = m$  であるから

$$p\alpha^3 - \frac{3p\alpha^3}{2} + M = m \quad \text{ゆえに} \quad p = \frac{2(M - m)}{\alpha^3}$$

(\*) より,  $q = -\frac{3p\alpha}{2}$ . 上式をこれに代入すると

$$q = -\frac{3(M - m)}{\alpha^2}$$

また, (\*) の 1 次の項の係数と定数項から  $r = 0, s = M$  ■