平成25年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学　数I・II・A・B

1 xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である．これを証明せよ．

2 1個のさいころを3回投げる試行において，1回目に出る目を a，2回目に出る目を b，3回目に出る目を c とする．

(1) $\log_{\frac{1}{4}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}} c$ となる確率を求めよ．

(2) $2^a+2^b+2^c$ が3の倍数となる確率を求めよ．

3 曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ．

解答例

1 点 $(x_0,\ y_0)$ を P とし，P から直線 $ax+by+c=0$ に垂線 PH を引く．点 H の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$ax_1+by_1+c=0 \quad \cdots ①$$

直線 $ax+by+c=0$ はベクトル $(a,\ b)$ に垂直であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=t(a,\ b) \quad \text{ゆえに} \quad (x_1-x_0,\ y_1-y_0)=t(a,\ b)$$

したがって $$(*) \begin{cases} x_1=at+x_0 \\ y_1=bt+y_0 \end{cases}$$

$(*)$ を ① に代入すると

$$a(at+x_0)+b(bt+y_0)+c=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

求める距離は

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=|t|\sqrt{a^2+b^2}=\left|-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

■

2 (1) $\log_{\frac{1}{4}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c=\log_{\frac{1}{4}}c^2$ ゆえに $a+b<c^2 \quad \cdots(*)$

$a+b$ の値に対する $(a,\ b)$ の組の個数は，次のようになる．

$a+b$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
個数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

$c=1$ のとき，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の組はない．

$c=2$ のとき，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の組の個数は $1+2=3$ (通り)

$c=3$ のとき，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の組の個数は

$$1+2+3+4+5+6+5=26 \ (\text{通り})$$

$c=4,\ 5,\ 6$ のとき，$(*)$ を満たす $(a,\ b)$ の組は，それぞれ 36 通り．

よって，求める確率は $$\frac{3+26+36\times 3}{6^3}=\boldsymbol{\frac{137}{216}}$$

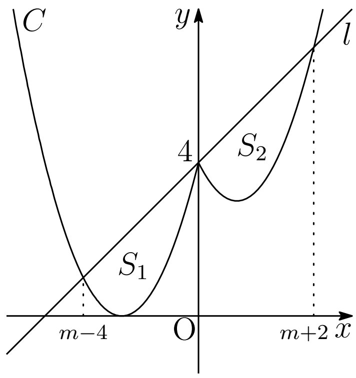
(2) $2^a+2^b+2^c\equiv(-1)^a+(-1)^b+(-1)^c \pmod 3$

したがって，$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となるのは，$a,\ b,\ c$ がすべて奇数またはすべて偶数のときである．よって，求める確率は

$$\frac{3^3+3^3}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

■

3 曲線 $C: y = x^2 + x + 4 - |3x|$ は



$$y = \begin{cases} (x+2)^2 & (x \leqq 0) \\ (x-1)^2 + 3 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

$x \leqq 0$ のとき，C と直線 $l: y = mx + 4$ の方程式から y を消去すると

$$x(x - m + 4) = 0$$

$m \leqq 4$ のとき，C と l の共有点の x 座標は　$x = 0,\ m - 4$

このとき，C と l で囲まれる部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{6}(4 - m)^3$$

$x \geqq 0$ のとき，C と l の方程式から y を消去すると

$$x(x - m - 2) = 0$$

$m \geqq -2$ のとき，C と l の共有点の x 座標は　$x = 0,\ m + 2$

このとき，C と l で囲まれる部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6}(m + 2)^3$$

ゆえに，C と l で囲まれる部分の面積を S とすると

$$S = \begin{cases} S_1 & (m \leqq -2) \\ S_1 + S_2 & (-2 \leqq m \leqq 4) \\ S_2 & (4 \leqq m) \end{cases}$$

したがって　$m \leqq -2$ のとき　$S \geqq 36$

$-2 \leqq m \leqq 4$ のとき　$S = 3(m-1)^2 + 9$

$4 \leqq m$ のとき　$S \geqq 36$

よって，$\boldsymbol{m = 1}$ のとき，面積は最小値 9 をとる． ■