平成24年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

1 1個のさいころを3回続けて投げるとき，1回目に出る目を l，2回目に出る目を m，3回目に出る目を n で表し，3次式

$$f(x) = x^3 + lx^2 + mx + n$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ．

2 次の2つの条件 (i)，(ii) をみたす自然数 n について考える．

(i) n は素数ではない．

(ii) l，m を1でも n でもない n の正の約数とすると，必ず

$$|l - m| \leqq 2$$

である．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) n が偶数のとき，(i)，(ii) をみたす n をすべて求めよ．

(2) n が7の倍数のとき，(i)，(ii) をみたす n をすべて求めよ．

(3) $2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で，(i)，(ii) をみたす n をすべて求めよ．

3 xy 平面上で考える．不等式 $y < -x^2 + 16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1| + |y| \leqq 1$ の表す領域を E とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ．

(2) $\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする．点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y = -x^2 + 16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする．$S(a,\ b)$ を a，b を用いて表せ．

(3) 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ を変形すると

$$f(x)=(x+1)^2(x+l-2)+(-2l+m+3)x-l+n+2$$

$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れるとき

$$\begin{cases} -2l+m+3=0 \\ -l+n+2=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} m=2l-3 \\ n=l-2 \end{cases}$$

$l,\ m,\ n$ は 1 以上 6 以下の整数であるから，これをみたすのは

$$(l,\ m,\ n)=(3,\ 3,\ 1),\ (4,\ 5,\ 2)$$

の 2 組である．よって，求める確率は $\dfrac{2}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{108}}$

(2) $f(x)$ を微分すると $f'(x)=3x^2+2lx+m$

関数 $y=f(x)$ が極大値・極小値をとるのは，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をときであるから，その係数について

$$D/4=l^2-3m>0 \quad \text{ゆえに} \quad m<\frac{l^2}{3}$$

よって，これをみたす $(l,\ m)$ の組は，次の 20 組である．

$$\begin{array}{ll} l=2\ \text{のとき} & m=1 \\ l=3\ \text{のとき} & m=1,\ 2 \\ l=4\ \text{のとき} & m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ l=5,\ 6\ \text{のとき} & m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \end{array}$$

このとき，これらの 20 組に対して，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 6 通りが対応する．よって，求める確率は

$$\frac{20\times 6}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{9}}$$

■

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $n=2l$ とおくと (l は2以上の整数)，(ii) により

$$|l-2| \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l=2,\ 3,\ 4 \quad \text{すなわち} \quad n=4,\ 6,\ 8$$

これらは，条件 (i)，(ii) をみたす．よって　$\boldsymbol{n=4,\ 6,\ 8}$

(2) $n=7l$ とおくと (l は2以上の整数)，(ii) により

$$|l-7| \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

すなわち　$n=35,\ 42,\ 49,\ 56,\ 63$

このうち，条件 (i)，(ii) をみたすものは　$\boldsymbol{n=35,\ 49}$

(3) 条件 (i)，(ii) をみたす偶数 n は (1) で求めたので，これらの条件をみたす奇数 n を求める．このとき，n は3個以上の奇数を約数にもつことはない．実際，3個の奇数を $p,\ q,\ r$ とすると $(p<q<r)$，$r-p \geqq 4$ であるから，条件 (ii) をみたさない．(i) により n は素数ではないから，n は2個の奇素数の積で，条件 (ii) をみたすのは

$$p^2 \quad \text{または} \quad p(p+2) \quad (p,\ p+2\ \text{は奇素数})$$

(a) $n=p^2$ のとき (p は奇素数)，$2 \leqq n \leqq 1000$ であるものは

$$n=3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 17^2,\ 19^2,\ 23^2,\ 29^2,\ 31^2$$

(b) $n=p(p+2)$ のとき ($p,\ p+2$ は奇素数)，$2 \leqq n \leqq 1000$ であるものは

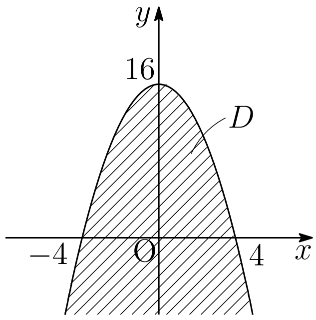
$$n=3\cdot5,\ 5\cdot7,\ 11\cdot13,\ 17\cdot19,\ 29\cdot31$$

したがって，(1)，(a)，(b) より，求める n は

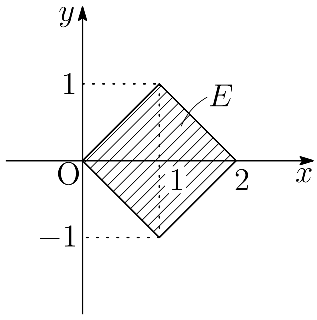
$$\begin{aligned}\boldsymbol{n=} & \ \mathbf{4,\ 6,\ 8,} \\ & \mathbf{9,\ 25,\ 49,\ 121,\ 169,\ 289,\ 361,\ 529,\ 841,\ 961,} \\ & \mathbf{15,\ 35,\ 143,\ 323,\ 899}\end{aligned}$$

■

3 (1) $D : y < -x^2 + 16$，$E : |x-1| + |y| \leqq 1$



境界線を含まない



境界線を含む

(2) $\mathrm{A}(a,\ b)$ は D に属する点であるから

$$b < -a^2 + 16 \quad \text{ゆえに} \quad 16 - a^2 - b > 0 \quad \cdots ①$$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾き $-2a$ の直線は

$$y - b = -2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = -2ax + 2a^2 + b$$

この直線の方程式と放物線 $y = -x^2 + 16$ の方程式から y を消去すると

$$-2ax + 2a^2 + b = -x^2 + 16 \qquad \text{ゆえに} \quad (x-a)^2 = 16 - a^2 - b$$

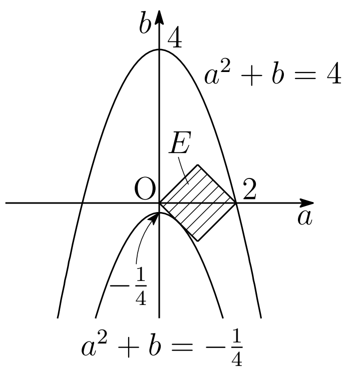
① に注意してこれを解くと　$x = a \pm \sqrt{16 - a^2 - b}$

これらの 2 解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると　$\beta - \alpha = 2\sqrt{16 - a^2 - b}$

よって　$S(a,\ b) = \dfrac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}(16 - a^2 - b)^{\frac{3}{2}}}$

(3) E において，$a^2 + b$ の取り得る値の範囲は，

右の図から　$-\dfrac{1}{4} \leqq a^2 + b \leqq 4$



$S(a,\ b) = \dfrac{4}{3}(16 - a^2 - b)^{\frac{3}{2}}$ より

$$S(a,\ b) \leqq S\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(16 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{65\sqrt{65}}{6}$$

よって　最大値 $S\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{65\sqrt{65}}{6}}$ ■