平成23年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学　数I・II・A・B

1 実数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，どのような整数 l，m，n に対しても，等式

$$l{\cdot}10^{x-y} - nx + l{\cdot}10^{y-z} + m{\cdot}10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

2 実数の組 $(p,\ q)$ に対し，$f(x) = (x-p)^2 + q$ とおく．

(1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り，しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ．

(2) 実数の組 $(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$ に対して，$f_1(x) = (x-p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x-p_2)^2 + q_2$ とおく．実数 α，β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ．

(3) 長方形 $R : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$ を考える．また，4点 $\mathrm{P_0}(0,\ 1)$，$\mathrm{P_1}(0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(1,\ 1)$，$\mathrm{P_3}(1,\ 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする．実数の組 $(p,\ q)$ を，放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする．R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

3 a，b，c を実数とする．ベクトル $\vec{v}_1 = (3,\ 0)$，$\vec{v}_2 = (1,\ 2\sqrt{2})$ をとり，$\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ とおく．座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*) \qquad (\vec{v}_1{\cdot}\vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2{\cdot}\vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3{\cdot}\vec{p})\vec{v}_3 = c\vec{p}$$

を考える．ここで $\vec{v}_i{\cdot}\vec{p}\ (i = 1, 2, 3)$ はベクトル $\vec{v}_i$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v} = (x,\ y)$ が，実数 s，t を用いて $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ と表されることを，s および t の各々を x，y の式で表すことによって示せ．

(2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が条件 $(*)$ をみたすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたすことを示せ．

(3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたす．このような実数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $(l,\ m,\ n)=(1,\ 0,\ 0)$ とすると　$10^{x-y}+10^{y-z}=13$　$\cdots$①
$(l,\ m,\ n)=(0,\ 1,\ 0)$ とすると　$10^{x-z}=36$　$\cdots$②
$(l,\ m,\ n)=(0,\ 0,\ 1)$ とすると　$-x=y$　$\cdots$③

①，② から

$$10^{x-y}+10^{x-z}\cdot 10^{y-x}=13 \quad \text{ゆえに} \quad 10^{x-y}+36\cdot 10^{y-x}=13$$

③ から $y=-x$ を上式に代入すると

$$10^{2x}+36\cdot 10^{-2x}=13 \quad \text{ゆえに}\ (10^{2x}-4)(10^{2x}-9)=0$$

したがって　$10^x=2,\ 3$

(i) $10^x=2$ のとき $(x=\log_{10}2)$，② より

$$2\cdot 10^{-z}=36 \quad \text{ゆえに} \quad 10^z=\frac{1}{18} \quad \text{すなわち} \quad z=-\log_{10}18$$

③ より　$y=-\log_{10}2$

(ii) $10^x=3$ のとき $(x=\log_{10}3)$，② より

$$3\cdot 10^{-z}=36 \quad \text{ゆえに} \quad 10^z=\frac{1}{12} \quad \text{すなわち} \quad z=-\log_{10}12$$

③ より　$y=-\log_{10}3$

よって，①，② より

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,-\log_{10}2,-\log_{10}18),}$$
$$\boldsymbol{(\log_{10}3,-\log_{10}3,-\log_{10}12)}$$

■

2 (1) 放物線 $y=(x-p)^2+q$ が点 $(0,\ 1)$ を通るから　$p^2+q=1$　$\cdots$①

$y=(x-p)^2+q$ と $y=x$ から y を消去すると

$$(x-p)^2+q=x \quad \text{整理すると} \quad x^2-(2p+1)x+p^2+q=0 \quad \cdots(*)$$

上の放物線と直線は接するから，$(*)$ の係数について

$$(2p+1)^2-4(p^2+q)=0 \quad \text{整理すると} \quad 4p-4q+1=0 \quad \cdots②$$

$(*)$ より，接点の x 座標 $\dfrac{2p+1}{2}$ が正であるから

$$\frac{2p+1}{2}>0 \quad \text{これを解いて} \quad p>-\frac{1}{2} \quad \cdots③$$

①，② から q を消去すると

$$4p^2+4p-3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (2p+3)(2p-1)=0$$

③ に注意して解くと　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{3}{4}}$

接点の x 座標は 1 で，直線 $y=x$ 上の点であるから　接点 **(1，1)**

(2) $g(x)=f_2(x)-f_1(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-p_2)^2+q_2-(x-p_1)^2-q_1 \\ &= 2(p_1-p_2)x-{p_1}^2+{p_2}^2-q_1+q_2 \end{aligned}$$

$g(x)$ のグラフは直線であるから，$m=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$ とおくと

$$g(x)=m(x-\alpha)+g(\alpha) \quad \cdots(\mathrm{A})$$

または

$$g(x)=m(x-\beta)+g(\beta) \quad \cdots(\mathrm{B})$$

とおける $(\alpha<\beta)$．与えられた条件から，$g(\alpha)>0$，$g(\beta)>0$ である．

(i) $0<g(\alpha)\leqq g(\beta)$ のとき

(A) より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において，$m\geqq 0$，$x-\alpha\geqq 0$ であるから

$$g(x)=m(x-\alpha)+g(\alpha)\geqq g(\alpha)>0$$

(ii) $0<g(\beta)<g(\alpha)$ のとき

(B) より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において，$m<0$，$x-\beta\leqq 0$ であるから

$$g(x)=m(x-\beta)+g(\beta)\geqq g(\beta)>0$$

(i)，(ii) より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において　$g(x)>0$　すなわち　$f_1(x)<f_2(x)$

(3) (1) の結果から

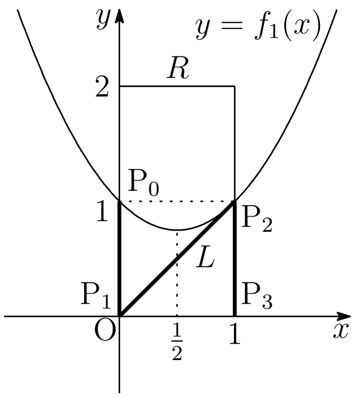
$$f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$$

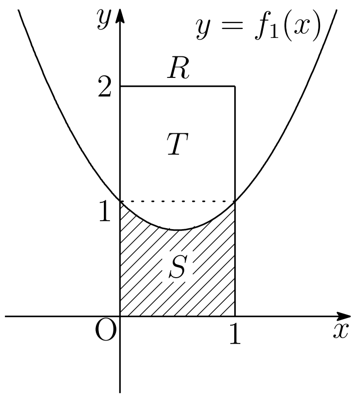
とおくと　　$f_1(0) = 1$，$f_1(1) = 1$

R を通過する放物線 $y = f_2(x)$ が L と共有点がないから

$$f_1(0) < f_2(0),\quad f_1(1) < f_2(1)$$

(2) の結論から，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f_1(x) < f_2(x)$ であるから，R の点のうちで放物線 $y = f_2(x)$ が通過する点全体の集合は，R の点うちで放物線 $y = f_1(x)$ の上側である．したがって，R から T を除いた領域 S は右下の図の斜線部分で，境界線を含む．





よって，求める面積は

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)\,dx = \left[\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} x = 3s + t \\ y = 2\sqrt{2}t \end{cases}$$

よって $\quad \boldsymbol{s = \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{6\sqrt{2}},\ \ t = \dfrac{y}{2\sqrt{2}}}$

(2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が $(*)$ をみたすとき

$$(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_3 - c\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \cdots ①$$
$$(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_3 - c\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \cdots ②$$

$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ は1次独立であるから，座標平面上の任意のベクトル $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \quad (\alpha,\ \beta \text{ は実数})$$

とかける．このとき，①，② より

$$\begin{aligned} &(\vec{v}_1\cdot\vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2\cdot\vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3\cdot\vec{p})\vec{v}_3 - c\vec{p} \\ =&\alpha\{(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_3 - c\vec{v}_1\} \\ &\qquad + \beta\{(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_3 - c\vec{v}_2\} \\ =&\alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

よって，座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたす．

(3) ①，② は，$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 = 9$，$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 3$，$\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 = 9$ より

$$(9-c)\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = -(\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_3 \quad \cdots ①'$$
$$3\vec{v}_1 + (9-c)\vec{v}_2 = -(\vec{v}_3\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_3 \quad \cdots ②'$$

上の 2 つのベクトルは，平行であるから

$$(9-c)^2 - 3^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad c = 6,\ 12$$

(i) $c = 6$ のとき，$\vec{v}_3 = a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ とおけるから，①′，②′ より

$$3(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = -12a\vec{v}_3 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -4a\vec{v}_3$$

このとき，$-4a^2 = 1$ となり，これをみたす実数 a は存在しない．

(ii) $c = 12$ のとき，$\vec{v}_3 = a(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ とおけるから，①′，②′ より

$$3(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 6a\vec{v}_3 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 2a\vec{v}_3$$

このとき　$2a^2 = 1$　これを解いて　$a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 12\right)}$　**(複号同順)**　■