平成 22 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 曲線 $C: y=-x^2-1$ を考える．

(1) t が実数全体を動くとき，曲線 C 上の点 $(t, -t^2-1)$ を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

(2) D を (1) で求めた領域の境界とする．D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を ℓ とする．D と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ．

2 連立方程式

$$\begin{cases} 2^x+3^y=43 \\ \log_2 x-\log_3 y=1 \end{cases}$$

を考える．

(1) この連立方程式を満たす自然数 x，y の組を求めよ．

(2) この連立方程式を満たす正の実数 x，y は，(1) で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ．

3 (1) 不等式

$$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2 \leqq 1$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ．

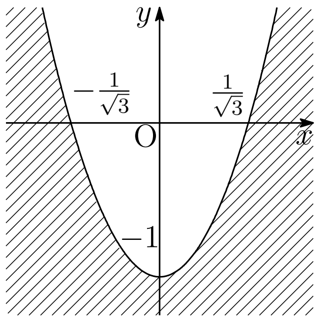
(2) 1 個のさいころを 4 回投げ，n 回目 $(n=1,2,3,4)$ に出た目の数を a_n とする．このとき

$$(x,\ y)=(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$$

が (1) の領域に含まれる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=\dfrac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ を t について整理すると



$$t^2+6xt-3x^2+4y+4=0$$

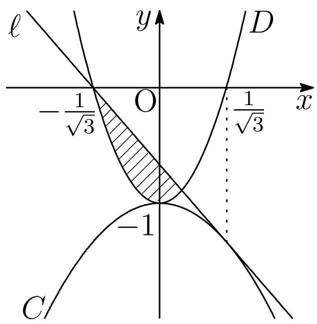
この t に関する 2 次方程式は実数解をもつから

$$D/4=(3x)^2-(-3x^2+4y+4)\geqq 0$$

したがって　　$y\leqq 3x^2-1$

よって，求める領域は右の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) (1) の結果から　$D:y=3x^2-1$



D の x 軸の正の部分と交わる点 $(a,\ 0)$ は $(a>0)$

$$3a^2-1=0\quad \text{すなわち}\quad a=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$C:y=-x^2-1$ より　$y'=-2x$

C 上の点 $(a,\ 0)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=-2a(x-a)-a^2-1$$

ゆえに　$y=-2ax+a^2-1$　すなわち　$y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}x-\dfrac{2}{3}$

D と ℓ の交点の x 座標は

$$3x^2-1=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\quad \text{これを解いて}\quad x=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

求める面積は右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}\left\{-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}-(3x^2-1)\right\}dx\\
&=-3\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)dx\\
&=\frac{3}{6}\left\{\frac{1}{3\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^3=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^3=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}}{243}}
\end{aligned}$$

■

2 (1) $(*)\begin{cases} 2^x+3^y=43 \\ \log_2 x-\log_3 y=1 \end{cases}$

$(*)$ の第 2 式から，$\log_2 x=\log_3 y+1=t$ とおくと

$$(**)\begin{cases} x=2^t \\ y=3^{t-1} \end{cases}$$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$2^{2^t}+3^{3^{t-1}}=43 \quad \text{ゆえに} \quad 4^t+27^{t-1}=43 \quad \cdots①$$

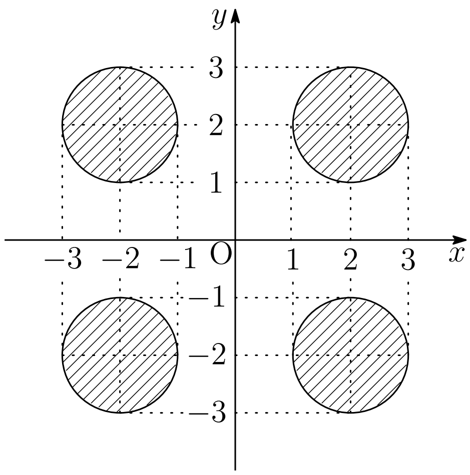
t の関数 4^t，27^{t-1} は単調増加であるから，4^t+27^{t-1} は単調増加関数である．
したがって，$t=2$ は ① を満たす唯一の解である．
これを $(**)$ に代入して　$\boldsymbol{(x,\ y)=(4,\ 3)}$

(2) (1) の結果から，x，y の組は $(x,\ y)=(4,\ 3)$ 以外に存在しない．■

3 (1) 領域

$$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2 \leqq 1$$

は x 軸および y 軸に関して対称．
第 1 象限にある領域は，中心 $(2,\ 2)$，半径 1 の円の周およびその内部であるから，求める領域は右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) $(x,\ y)=(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が (1) の領域に含まれるのは

$$(|a_1-a_2|,\ |a_3-a_4|)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

のときで，これらの場合の数は，それぞれ

$$10\cdot 8,\quad 8\cdot 10,\quad 8\cdot 8,\quad 8\cdot 6,\quad 6\cdot 8$$

よって，求める確率は　$\dfrac{80+80+64+48+48}{6^4}=\boldsymbol{\dfrac{20}{81}}$ ■