平成 21 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 曲線 $C : y = x^3 - kx$ (k は実数) を考える．C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ $(a \neq 0)$ をとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 A における C の接線を ℓ_1 とする．ℓ_1 と C の A 以外の交点を B とする．B の x 座標を求めよ．

(2) 点 B における C の接線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき，a と k がみたす条件を求めよ．

(3) ℓ_1 と ℓ_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ．

2 平面上の三角形 OAB を考え，

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad t = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$$

とおく．辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = t\vec{b}$ となる点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ．

(2) t の値を求めよ．

(3) AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

3 次のような，いびつなさいころを考える．1，2，3 の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$，4 の目が出る確率は a，5，6 の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{4} - \dfrac{a}{2}$ である．ただし，$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ とする．

このさいころを振ったとき，平面上の $(x,\ y)$ にある点 P は，1，2，3 のいずれかの目が出ると $(x+1,\ y)$ に，4 の目が出ると $(x,\ y+1)$ に，5，6 のいずれかの目が出ると $(x-1,\ y-1)$ に移動する．

原点 $(0,\ 0)$ にあった点 P が，k 回さいころを振ったときに $(2,\ 1)$ にある確率を p_k とする．

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_6 を求めよ．

(3) p_6 が最大となるときの a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^3 - kx$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - k$

C 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

これと $C : y = f(x)$ の共有点の x 座標は

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$$

ここで
$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= x^3 - kx - (a^3 - ka) \\ &= (x - a)(x^2 + ax + a^2 - k), \\ f'(a) &= 3a^2 - k \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} (x - a)(x^2 + ax + a^2 - k) &= (3a^2 - k)(x - a) \\ (x - a)(x^2 + ax - 2a^2) &= 0 \\ (x - a)^2(x + 2a) &= 0 \end{aligned}$$

このとき，$x \neq a$ であるから　$\boldsymbol{x = -2a}$

(2) $f'(a)f'(-2a) = -1$ であるから　$\boldsymbol{(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1}$

(3) (2) の結果を a について整理すると　$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0$

ここで，$t = 3a^2$ とおくと　$4t^2 - 5kt + k^2 + 1 = 0$

上の t に関する 2 次方程式が $t > 0$ をみたす解をもてばよい．この方程式の 2 解を α，β，判別式を D とすると

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = \frac{5k}{4}, \quad \alpha\beta = \frac{k^2 + 1}{4} > 0, \\ &D = (-5k)^2 - 4{\cdot}4(k^2 + 1) = 9k^2 - 16 \end{aligned}$$

$\alpha + \beta > 0$，$D \geqq 0$ を満たせばよいから

$$\frac{5k}{4} > 0, \quad 9k^2 - 16 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{k \geqq \frac{4}{3}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ であるから

$$(t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

上の第 2 式に $t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ を代入すると

$$\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}\cdot|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ であるから

$$\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{3}|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$ を上の第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{3}|\vec{a}|^2=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \quad \text{ゆえに} \quad t=\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

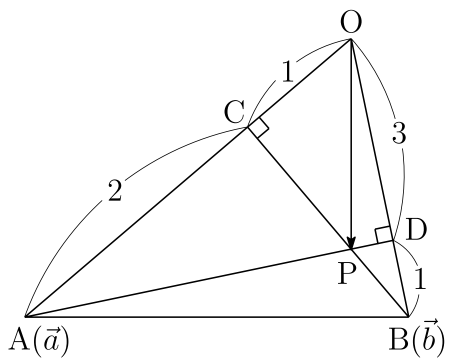
(3) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3x\overrightarrow{\mathrm{OC}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{4}{3}y\overrightarrow{\mathrm{OD}}\end{cases}$$

P は BC および AD 上の点であるから

$$\begin{cases}3x+y=1\\ x+\dfrac{4}{3}y=1\end{cases}$$



これを解いて　$x=\dfrac{1}{9}$，$y=\dfrac{2}{3}$　　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$ ■

$\boxed{3}$ (1) 1，2，3 のいずれかの目が出る事象 L の確率は　$3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

4 の目が出る事象 M の確率は　a

5，6 のいずれかの目が出る事象 N の確率は　$2\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}-a$

k 回さいころを振ったときに，L が l 回，M が m 回，N が n 回起こる確率は $(k=l+m+n)$

$$\frac{k!}{l!m!n!}\left(\frac{1}{2}\right)^l a^m\left(\frac{1}{2}-a\right)^n \quad \cdots(*)$$

原点にあった点 P が，k 回さいころを振って $(2,\ 1)$ にあるのは $k \geqq 3$ のときであるから

$$\boldsymbol{p_1=p_2=0}$$

原点にあった点 P が，3 回さいころを振って $(2,\ 1)$ にあるのは，L が 2 回，M が 1 回，N が 0 回起きるときであるから，$(*)$ より

$$p_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 a=\boldsymbol{\frac{3}{4}a}$$

(2) さいころを 6 回振り，L が l 回，M が m 回，N が n 回起きて，P が $(2,\ 1)$ にあるとき

$$l-n=2,\quad m-n=1,\quad l+m+n=6$$

これを解いて　$l=3,\ m=2,\ n=1$

$(*)$ より，求める確率 p_6 は

$$p_6=\frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 a^2\left(\frac{1}{2}-a\right)=\boldsymbol{\frac{15}{4}a^2(1-2a)}$$

(3) (2) の結果から，$f(a)=a^2(1-2a)$ とおくと $\left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}\right)$

$$f'(a)=2a-6a^2=2a(1-3a)$$

したがって，$f(a)$ の増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$	$\searrow$	0

$p_6=\frac{15}{4}f(a)$ であるから，p_6 を最大にする a の値は　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$　■