

平成 20 年度 大阪大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 90 分
 文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

- 1 点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle XOY = 60^\circ$ とする. 2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に, また, 2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とする. 線分 AB の長さを s , 線分 CD の長さを t とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 NM の長さを s と t を用いて表せ.
- (2) 点 A, B と C, D が, $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 線分 MN の長さの最大値を求めよ.

- 2 実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x) = x^3 + 3ax^2 + 3ax + b$ を考える. $P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

とする. α, β, γ の間に $\alpha + \gamma = 2\beta$ という関係があるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) b を a の式で表せ.
- (2) α, β, γ がすべて実数であるとする. このとき a のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) (1) で求めた a の式を $f(a)$ とする. a が (2) の範囲を動くとき, 関数 $b = f(a)$ のグラフをかけ.

- 3 a を正の定数とし,

$$f(x) = ||x - 3a| - a|, \quad g(x) = -x^2 + 6ax - 5a^2 + a$$

を考える.

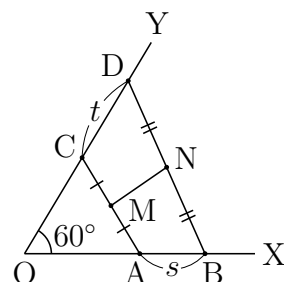
- (1) 方程式 $f(x) = a$ の解を求めよ.
- (2) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

解答例

1 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ とすると

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\vec{a} + \vec{u}) + (\vec{c} + \vec{v})\}\end{aligned}$$



したがって

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\{(\vec{a} + \vec{u}) + (\vec{c} + \vec{v})\} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

$$|\vec{u}| = s, |\vec{v}| = t, \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}st \text{ より}$$

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\vec{u} + \vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{s^2 + st + t^2}$$

$$(2) s^2 + t^2 = 1 \text{ より } st = \frac{1}{2}\{s^2 + t^2 - (s - t)^2\} = \frac{1}{2}\{1 - (s - t)^2\}$$

$$\text{したがって } s^2 + st + t^2 = \frac{1}{2}\{3 - (s - t)^2\} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{上式および (1) の結果から } MN \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{よって, 求める最大値は } \frac{\sqrt{6}}{4}$$

別解 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1 = s^2 + t^2 \geq 2\sqrt{s^2 t^2} \quad \text{ゆえに} \quad st \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } s^2 + st + t^2 \leq \frac{3}{2} \quad \text{よって} \quad MN \leq \frac{\sqrt{6}}{4}$$

■

- 2** (1) 3次方程式 $x^3 + 3ax^2 + 3ax + b = 0$ の解が α, β, γ であるから、解と係数の関係により

$$(*) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -3a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3a \\ \alpha\beta\gamma = -b \end{cases}$$

(*) の第1式および第2式から

$$(\alpha + \gamma) + \beta = -3a, \quad \beta(\alpha + \gamma) + \gamma\alpha = 3a$$

上の2式に $\alpha + \gamma = 2\beta$ を代入すると

$$2\beta + \beta = -3a, \quad \beta \cdot 2\beta + \gamma\alpha = 3a$$

整理すると $\beta = -a \cdots \textcircled{1}$, $\gamma\alpha = 3a - 2\beta^2$ ゆえに $\gamma\alpha = 3a - 2a^2 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を (*) の第3式に代入すると

$$-a(3a - 2a^2) = -b \quad \text{よって} \quad b = -2a^3 + 3a^2$$

- (2) $\textcircled{1}$ より, β は実数.

$\textcircled{1}$ を $\alpha + \gamma = 2\beta$ に代入すると $\alpha + \gamma = -2a \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より, α, γ を解とする2次方程式は

$$t^2 + 2at + 3a - 2a^2 = 0$$

この2次方程式の解が実数であるから、判別式を D とすると

$$D/4 = a^2 - 1(3a - 2a^2) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a - 1) \geq 0$$

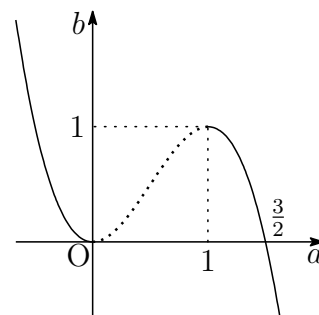
よって、求める a の値の範囲は $a \leq 0, 1 \leq a$

- (3) (1), (2) の結果から, $f(a) = -2a^3 + 3a^2$ より

$$f'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a - 1)$$

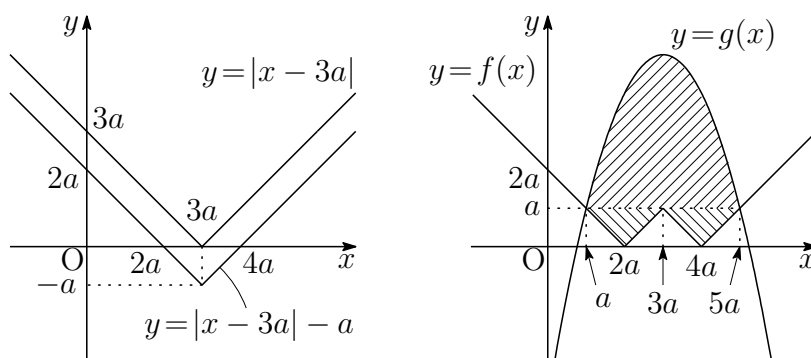
a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	-	0	+	0	-
$f(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

a が (2) で求めた範囲にあるとき、グラフは右の図の実線部分である.



- 3** (1) 方程式 $f(x) = a$ の解は、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の x 座標であるから、右下の図から

$$x = a, 3a, 5a$$



- (2) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = 2 \times \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 2a^2$$

$y = g(x)$ のグラフと直線 $y = a$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^{5a} \{g(x) - a\} dx = \int_a^{5a} (-x^2 + 6ax - 5a^2) dx \\ &= - \int_a^{5a} (x - a)(x - 5a) dx = \frac{1}{6}(5a - a)^3 = \frac{32}{3}a^3 \end{aligned}$$

よって、求める面積 S は

$$S = S_1 + S_2 = 2a^2 + \frac{32}{3}a^3$$

