平成18年度　大阪大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学　数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 aを実数とし，関数

$$f(x) = x^3 - 3ax + a$$

を考える．$0 \leqq x \leqq 1$において

$$f(x) \geqq 0$$

となるようなaの範囲を求めよ．

2 自然数m，nと$0 < a < 1$を満たす実数aを，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる．以下の問いに答えよ．

(1) 自然数m，nを求めよ．

(2) 不等式$a > \dfrac{2}{3}$が成り立つことを示せ．

3 xy平面上の点A$(1,\ 2)$を通る直線lがx軸，y軸とそれぞれ点P，Qで交わるとする．点Rを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

を満たすようにとる．ただし，Oはxy平面の原点である．このとき，直線lの傾きにかかわらず，点Rはある関数$y = f(x)$のグラフ上にある．関数$f(x)$を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) \geqq 0$ となるためには

$$f(0) = a \geqq 0,\quad f(1) = 1 - 2a \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$$

であることが必要条件である．

(i) $a = 0$ のとき，$f(0) = 0$，$f'(x) \geqq 0$ であるから，$a = 0$ は条件を満たす．

(ii) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$ より

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) \geqq 0$ となる条件は

$$f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + a = a(1 - 2\sqrt{a}) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a \leqq \frac{1}{4}$$

(i), (ii) より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{4}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $2 = \log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 = 3$，$0 < \dfrac{1}{n+a} < 1$ より

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a} \quad \cdots ①$$

を満たす自然数 m は　$\boldsymbol{m = 2}$

これを ① に代入して整理すると

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{1}{n+a} \quad \text{ゆえに} \quad n + a = \log_{\frac{3}{2}} 2 \quad \cdots ②$$

n は自然数，$0 < a < 1$，$1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = 2$ であるから

$$\boldsymbol{n = 1}$$

(2) (1) の結果を ② に代入して整理すると

$$a = \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^a = \frac{4}{3}$$

上の第 2 式の両辺を 3 乗すると

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3a} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} > \frac{9}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{3a} > \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

したがって　$3a > 2$　よって　$a > \dfrac{2}{3}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ l の傾きを t とすると $(t \neq 0)$

$$y - 2 = t(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = tx - t + 2$$

したがって　$\mathrm{P}\left(-\dfrac{2}{t} + 1,\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0, -t+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \left(-\frac{2}{t} + 1,\ 0\right) + (0, -t+2) - (1,\ 2) \\ &= \left(-\frac{2}{t}, -t\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと　$x = -\dfrac{2}{t}$，$y = -t$　ゆえに　$y = \dfrac{2}{x}$　よって　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2}{x}}$ ■