平成17年度　大阪大学　2次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 次の問いに答えよ.

(1) 不等式 $10^{2x} \leqq 10^{6-x}$ をみたす実数 x の範囲を求めよ.

(2) $10^{2x} \leqq y \leqq 10^{5x}$ と $y \leqq 10^{6-x}$ を同時にみたす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ.

2 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ とおく.

(1) 関数 $f(x)$ の増減表を作り，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) 直線 $y = mx$ が曲線 $y = f(x)$ と相異なる3点で交わるような実数 m の範囲を求めよ.

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定め，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = a_1 a_2, \quad b_{n+1} - b_n = a_{n+1} a_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める.

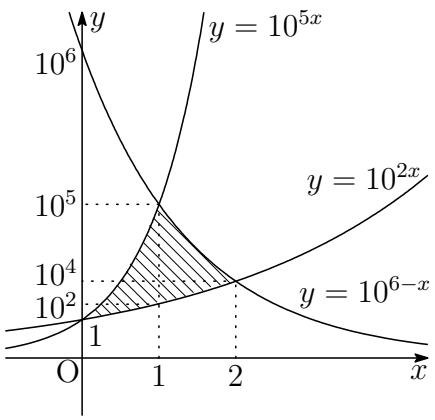
(1) 一般項 a_n を n を用いて表せ.

(2) 一般項 b_n を n を用いて表せ.

解答例

1 (1) $10^{2x} \leqq 10^{6-x}$ より　$2x \leqq 6-x$　これを解いて　$\boldsymbol{x \leqq 2}$

(2) $y \geqq 10^{2x}$, $y \leqq 10^{5x}$, $y \leqq 10^{6-x}$ を同時にみたす領域は，右の図の斜線部分である．この領域にある格子点の個数を求めればよい．



$x = 0$ のとき　$y = 1$ の 1 個

$x = 1$ のとき　$10^5 - 10^2 + 1$ (個)

$x = 2$ のとき　$y = 10^4$ の 1 個

よって，求める個数は

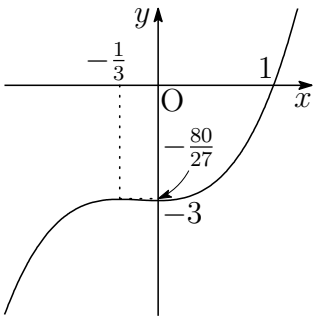
$$1 + (10^5 - 10^2 + 1) + 1 = 10^5 - 10^2 + 3 = \mathbf{99903}\ \textbf{(個)}$$

■

2 (1) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ より

$$f'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x+1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{80}{27}$	↘	-3	↗



よって，グラフの概形は右の図のようになる．

(2) $y = f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (2t^3 + t^2 - 3) = (6t^2 + 2t)(x - t)$$

すなわち　$y = (6t^2 + 2t)x - 4t^3 - t^2 - 3$

これが原点 O を通るとき　$-4t^3 - t^2 - 3 = 0$

$$(t+1)(4t^2 - 3t + 3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -1$$

このとき，接線の方程式は　$y = 4x$

よって，$y = mx$ が $y = f(x)$ と異なる 3 点で交わるような m の値の範囲は，(1) で求めたグラフから

$$\boldsymbol{m > 4}$$

■

3 (1) $a_1 = \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n \geqq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} 1$ ゆえに $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_1} = n - 1$

$a_1 = \dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{a_n} = n + 2$ ゆえに $a_n = \dfrac{1}{n+2} \quad \cdots ①$

① は $n = 1$ のときも成立するから $\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{n+2}}$

(2) (1) の結果から $a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_2 = \dfrac{1}{4}$ ゆえに $b_1 = a_1 a_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

$b_{n+1} - b_n = a_{n+1}a_{n+2}$ より $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$$

$n \geqq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$

$b_n - b_1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{n+3}$ $b_1 = \dfrac{1}{12}$ より $b_n = \dfrac{n}{3(n+3)} \quad \cdots ②$

② は $n = 1$ のときも成立するから $\boldsymbol{b_n = \dfrac{n}{3(n+3)}}$ ■