

平成16年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

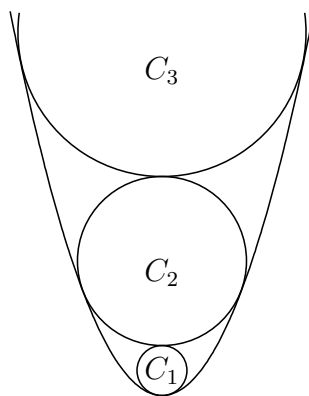
問題 1 2 3

1 3次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$ に関して以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が極値をもつための条件を, $f(x)$ の係数を用いて表せ.
- (2) $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大, $x = \beta$ で極小になるとき, 点 $(\alpha, f(\alpha))$ と点 $(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ. また, $y = f(x)$ のグラフは平行移動によって $y = x^3 + \frac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ.

2 座標平面上で不等式 $y \geq x^2$ の表す領域を D とする. D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち, 最も半径の大きい円を C_1 とする. 自然数 n について, 円 C_n が定まったとき, C_n の上部で C_n に外接する円で, D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち, 最も半径の大きい円を C_{n+1} とする. C_n の半径を a_n とし, $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする.

- (1) a_1 を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ.
- (3) a_n を n の式で表せ.



3 n を自然数とする. プレイヤー A, B がサイコロを交互に投げるゲームをする. 最初は A が投げ, 先に 1 の目を出した方を勝ちとして終わる. ただし, A が n 回投げても勝負がつかない場合は B の勝ちとする.

- (1) A の k 投目 ($1 \leq k \leq n$) で A が勝つ確率を求めよ.
- (2) このゲームにおいて A が勝つ確率 P_n を求めよ.

- (3) $P_n > \frac{1}{2}$ となるような最小の n の値を求めよ．ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい．

解答例

- 1** (1) $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$ より $f'(x) = 3x^2 + 6ax + b$
 求める条件は、 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。
 したがって、その係数について

$$D/4 = (3a)^2 - 3b = 3(3a^2 - b) > 0 \quad \text{よって} \quad 3a^2 - b > 0$$

- (2) α, β は、 $f'(x) = 0$ 、すなわち、方程式 $3x^2 + 6ax + b = 0$ の解であるから、
 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = \frac{b}{3}$$

$f(\alpha) = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + b\alpha + c$ 、 $f(\beta) = \beta^3 + 3a\beta^2 + b\beta + c$ より、
 2 点 $(\alpha, f(\alpha))$ 、 $(\beta, f(\beta))$ を通る直線の傾き m は

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{(\beta^3 - \alpha^3) + 3a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 3a(\alpha + \beta) + b \\ &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 3a(\alpha + \beta) + b \\ &= (-2a)^2 - \frac{b}{3} + 3a(-2a) + b = \frac{2}{3}(b - 3a^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad f(x) &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + (b - 3a^2)x - a^3 + c \\ &= (x + a)^3 + (b - 3a^2)\{(x + a) - a\} - a^3 + c \\ &= (x + a)^3 + (b - 3a^2)(x + a) + 2a^3 - ab + c \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad f(x) = (x + a)^2 + \frac{3}{2}m(x + a) + 2a^3 - ab + c$$

よって、 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に a 、 y 軸方向に $-2a^3 + ab - c$ だけ平行移動することによって $y = x^3 + \frac{3}{2}mx$ のグラフに移る。 ■

- 2** (1) 放物線 $y = x^2$ と円 $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ から x を消去すると

$$y + (y - r)^2 = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad y\{y - (2r - 1)\} = 0$$

これが $y > 0$ となる解をもたないとき

$$2r - 1 \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad r \leq \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

- (2) 放物線 $y = x^2$ と円 $x^2 + (y - q)^2 = r^2$ から y を消去すると

$$y + (y - q)^2 = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 - (2q - 1)y + q^2 - r^2 = 0$$

これらの曲線が接するとき, y の係数について

$$(2q - 1)^2 - 4(q^2 - r^2) = 0 \quad \text{整理すると} \quad r^2 - q + \frac{1}{4} = 0$$

上の第2式に $r = a_n$, $q = a_n + 2b_{n-1}$ を上式に代入すると

$$a_n^2 - (a_n + 2b_{n-1}) + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = 2b_{n-1} \quad (*)$$

これを a_n について解くと $a_n = \pm\sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2}$

このとき, $b_n \geq b_1 = a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n > 0$ であるから

$$a_n = \sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2}$$

- (3) (*) により $\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = 2b_{n-1}$, $\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = 2b_n$

上の第2式から第1式の辺々を引くと

$$\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = 2(b_n - b_{n-1})$$

$b_n - b_{n-1} = a_n$ に注意して整理すると

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_{n+1} - a_n^2 + a_n &= 2a_n \\ (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$a_{n+1} + a_n > 0$ であるから $a_{n+1} = a_n + 1$

$\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公差 1 の等差数列であるから $a_n = n - \frac{1}{2}$ ■

- 3** (1) A, B それぞれが $k-1$ 回連続して 1 以外の目が出て, A の k 回目で 1 の目が出る確率であるから

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2(k-1)}$$

- (2) (1) の結果から

$$P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2(k-1)} = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \right\}$$

- (3) $P_n > \frac{1}{2}$ となるとき, (2) の結果から

$$\frac{11}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \right\} < \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} < \frac{1}{12}$$

$\left(\frac{12}{10}\right)^{2n} > 12$ であるから, この両辺の常用対数をとると

$$2n(\log_{10} 12 - 1) > \log_{10} 12$$

$a = \log_{10} 12 - 1$ とおくと, $a > 0$ に注意して

$$n > \frac{a+1}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } 2a &= 2(\log_{10} 12 - 1) = 2(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1) \\ &= 4 \cdot 0.3010 + 2 \cdot 0.4771 - 2 = 0.1582 \end{aligned}$$

$$\frac{155}{1000} < 2a < \frac{16}{100} \quad \text{ゆえに} \quad 6 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2a} < 6 + \frac{14}{31} < 6 + \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad 6 + \frac{3}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} < 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, 求める最小の n は **$n = 7$** ■