平成 15 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 平面ベクトル $\vec{p} = (p_1,\ p_2)$，$\vec{q} = (q_1,\ q_2)$ に対して $\{\vec{p},\ \vec{q}\} = p_1q_2 - p_2q_1$ と定める．

(1) 平面ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対して $\{\vec{a},\ \vec{b}\} = \ell$，$\{\vec{b},\ \vec{c}\} = m$，$\{\vec{c},\ \vec{a}\} = n$ とするとき

$$\ell\vec{c} + m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$$

が成り立つことを示せ．

(2) (1) で ℓ，m，n がすべて正であるとする．このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r，s，t を用いて

$$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表すことができることを示せ．

2 自然数 m に対して，m の相異なる素因数をすべてかけあせたものを $f(m)$ で表すことにする．たとえば $f(72) = 6$ である．ただし $f(1) = 1$ とする．

(1) m，n を自然数，d を m，n の最大公約数とするとき

$$f(d)f(mn) = f(m)f(n)$$

となることを示せ．

(2) 2 つの箱 A，B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている．箱 A，B から 1 枚ずつ札を取り出す．箱 A から取り出した札の番号を m，箱 B から取り出した札の番号を n とするとき

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_1 と

$$2f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_2 を求めよ．

3 放物線 $C : y = -x^2 + 2x + 1$ と x 軸の共有点を A$(a,\ 0)$，B$(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y = mx$ の共有点を P$(\alpha,\ m\alpha)$，Q$(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする．ただし $a < b$，$m \neq 0$，$\alpha < \beta$ とする．線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ．

解答例

1 (1) $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とおくと

$$\ell=\{\vec{a},\ \vec{b}\}=a_1b_2-a_2b_1$$
$$m=\{\vec{b},\ \vec{c}\}=b_1c_2-b_2c_1$$
$$n=\{\vec{c},\ \vec{a}\}=c_1a_2-c_2a_1$$

$\ell\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned}x&=(a_1b_2-a_2b_1)c_1+(b_1c_2-b_2c_1)a_1+(c_1a_2-c_2a_1)b_1\\&=(a_1b_2-a_2b_1)c_1+\cancel{a_1b_1c_2}-a_1b_2c_1+a_2b_1c_1-\cancel{a_1b_1c_2}=0,\\y&=(a_1b_2-a_2b_1)c_2+(b_1c_2-b_2c_1)a_2+(c_1a_2-c_2a_1)b_2\\&=(a_1b_2-a_2b_1)c_2+a_2b_1c_2-\cancel{a_2b_2c_1}+\cancel{a_2b_2c_1}-a_1b_2c_2=0\end{aligned}$$

よって　　$\ell\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$

(2) $\ell\neq0$ より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではないから，任意のベクトル $\vec{d}$ に対して

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$

とおける．正の実数 k を用いて，(1) の結果から

$$k(\ell\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b})=\vec{0}$$

上の 2 式から　　$\vec{d}=(km+\alpha)\vec{a}+(kn+\beta)\vec{b}+k\ell\vec{c}$

$\ell,\ m,\ n$ はすべて正であるから，$km+\alpha\geqq0,\ kn+\beta\geqq0$ を満たす正の実数 k をとり，$r=km+\alpha$，$s=kn+\beta$，$t=k\ell$ とおくと

$$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad(r,\ s,\ t\text{は}0\text{以上の実数})$$

別解 O を始点する 3 点 A($m\vec{a}$)，B($n\vec{b}$)，C($\ell\vec{c}$) を頂点とする △ABC の重心は，(1) の結果から O である．O を端点する半直線 OA，OB，OC によってできた領域を考える．このとき，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ について

点 D($\vec{d}$) が半直線 OA 上にあるとき　$r\geqq0,\ s=t=0.$

点 D($\vec{d}$) が他の半直線上にある場合も同様.

点 D($\vec{d}$) が半直線 OA，OB による C を含まない開領域にあるとき

$$r>0,\ s>0,\ t=0.$$

点 D($\vec{d}$) が他の開領域にある場合も同様. ■

2 (1) $m,\ n,\ d$ それぞれの素因数の積を $P,\ Q,\ R$ とすると，mn の素因数の積は，m 固有の素因数の積 $\dfrac{P}{R}$，n 固有の素因数の積 $\dfrac{Q}{R}$，m と n に共通する素因数の積 R の積であるから

$$\frac{P}{R}\cdot\frac{Q}{R}\cdot R=\frac{PQ}{R}\quad\text{ゆえに}\quad f(mn)=\frac{f(m)f(n)}{f(d)}$$

よって　　$f(d)f(mn)=f(m)f(n)$

別解 自然数 $m,\ n$ を構成する素数の集合をそれぞれ $A,\ B$ とすると

$$f(mn)=\prod_{p_i\in A\cup B}p_i=\prod_{p_i\in A}p_i\prod_{p_i\in B}p_i\Big/\prod_{p_i\in A\cap B}p_i=\frac{f(m)f(n)}{f(d)}$$

(2) (1) の結果から，$p_1,\ p_2$ はそれぞれ $f(d)=1,\ f(d)=2$ となる確率である．これに該当する $f(d)$ の値は次のとおりである．

m \ n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1		1	1		1	1		1
4	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
5	1	1	1	1		1	1	1	1	
6	1	2		2	1		1	2		2
7	1	1	1	1	1	1		1	1	1
8	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
9	1	1		1	1		1	1		1
10	1	2	1	2		2	1	2	1	

よって　　$\boldsymbol{p_1=\dfrac{63}{100},\ p_2=\dfrac{23}{100}}$ ■

3 線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積を S，線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積を T とし，曲線 C と直線 $y=mx$ で囲まれた部分で x 軸の上側の部分の面積を U とする．$S=T$ より，$S+U=U+T$ である．

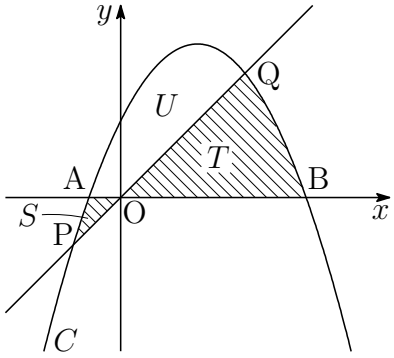
(i) $m>0$ のとき

$$S+U=\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2+2x+1)-mx\}\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$U+T=\int_{a}^{b}(-x^2+2x+1)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

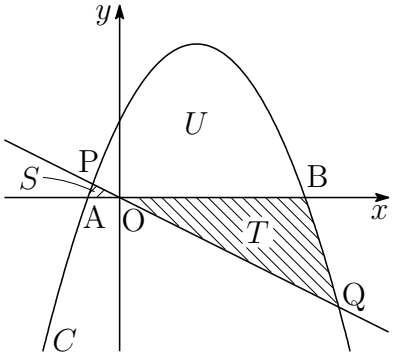
(ii) $m<0$ のとき

$$S+U=\int_{a}^{b}(-x^2+2x+1)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$
$$U+T=\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2+2x+1)-mx\}\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$m>0$



$m<0$



$S+U=U+T$ であるから，(i)，(ii) より　　$b-a=\beta-\alpha$　$\cdots(*)$

a, b は 2 次方程式 $-x^2+2x+1=0$ の解であるから $(a<b)$

$$b-a=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

α, β は 2 次方程式 $-x^2+2x+1-mx=0$，すなわち，$x^2+(m-2)x-1=0$ の解であるから $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{2-m+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}-\frac{2-m-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$
$$=\sqrt{(m-2)^2+4}$$

ゆえに　$\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2}$　条件 $m\neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{m=4}$　■