平成 14 年度　大阪大学　2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 次の問いに答えよ.

(1) 実数の定数 p に対して，3 次方程式 $x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ.

(2) p，q は定数で $p \geqq 2$，$q \geqq 2$ とする．2 つの 3 次方程式

$$x^3+x-p=0, \quad x^3+x-q=0$$

の実数解をそれぞれ α，β とするとき，

$$|\alpha-\beta| \leqq \frac{1}{4}|p-q|$$

が成立することを示せ.

2 平面上に 3 つの放物線

$$C_1 : y=-x(x-1), \quad C_2 : y=x(x-1), \quad C : y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$$

を考える．いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t, -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする.

(1) a，b を t を用いて表せ.

(2) 2 つの放物線 C，C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ.

(3) t を動かすとき，S の最小値を求めよ.

3 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える．K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A，B とする．円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を 1 : 2 の比に内分する点を R とする．いま k を正の定数として，

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$$

とおく．ただし，Q = A のときは R = A とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{q}$ を用いて表せ.

(2) 点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする．K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ.

(3) 円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x)=x^3+x$ とおくと　$f'(x)=3x^2+1>0$

$y=f(x)$ のグラフは単調増加であるから，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ の共有点の個数は 1 個．したがって，3 次方程式

$$x^3+x=p \quad \text{すなわち} \quad x^3+x-p=0$$

の実数解の個数は　1 個

(2) $f(x)$ は単調増加で，$f(1)=2$ であるから，$p\geqq 2,\ q\geqq 2$ について，

$$f(\alpha)=p, \quad f(\beta)=q$$

を満たす $\alpha,\ \beta$ は　　$\alpha\geqq 1,\ \beta\geqq 1$

$$\begin{aligned}|p-q| &= |f(\alpha)-f(\beta)| = |(\alpha^3+\alpha)-(\beta^3+\beta)| \\ &= |\alpha-\beta||\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1| \\ &\geqq |\alpha-\beta|(1^2+1\cdot 1+1^2+1)=4|\alpha-\beta|\end{aligned}$$

よって　　$|\alpha-\beta|\leqq \dfrac{1}{4}|p-q|$

補足 $\alpha=\beta$ のとき，明らかに成立する．

$\alpha\neq\beta$ のとき，2 点 $(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta))$ を通る直線の傾きを m とすると

$$m=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{q-p}{\beta-\alpha}$$

$\alpha\geqq 1,\ \beta\geqq 1$ であるから，$m\geqq f'(1)$ より

$$\frac{q-p}{\beta-\alpha}\geqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{|q-p|}{|\beta-\alpha|}\geqq 4 \quad \text{よって} \quad |\alpha-\beta|\leqq\frac{1}{4}|p-q|$$

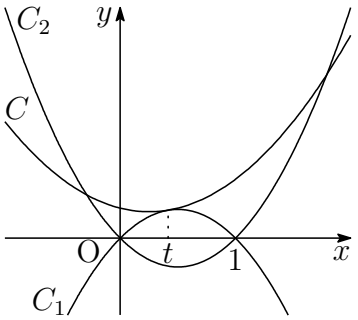
■

2 (1) $C : y = \dfrac{1}{2}x^2 + ax + b$ より　$y' = x + a$

$C_1 : y = -x(x-1)$ より　$y' = -2x + 1$

C と C_1 が点 $(t, -t^2+t)$ で共通の接線をもつから

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 + at + b = -t^2 + t \\ t + a = -2t + 1 \end{cases}$$



これを解いて　$\boldsymbol{a = -3t + 1,\ \ b = \dfrac{3}{2}t^2}$

(2) (1) の結果から　$C : y = \dfrac{1}{2}x^2 + (-3t+1)x + \dfrac{3}{2}t^2$

C と C_2 の共有点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$，x^2 の係数に注意して

$$\frac{1}{2}x^2 + (-3t+1)x + \frac{3}{2}t^2 - x(x-1) = -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)$$

上式の左辺を $f(x)$ とするとすると

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (-3t+2)x + \frac{3}{2}t^2$$

$\alpha,\ \beta$ は，$f(x) = 0$，すなわち，$x^2 - 2(-3t+2)x - 3t^2 = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= -3t + 2 + \sqrt{12t^2 - 12t + 4} - \left(-3t + 2 - \sqrt{12t^2 - 12t + 4}\right) \\ &= 4\sqrt{3t^2 - 3t + 1} \end{aligned}$$

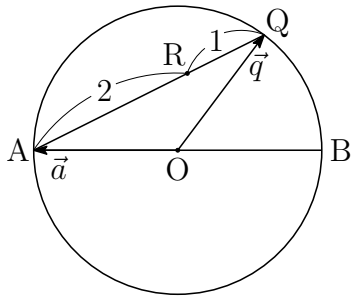
したがって，求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}(3t^2 - 3t + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$S = \dfrac{16}{3}\left\{3\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right\}^{\frac{3}{2}} \geqq \dfrac{2}{3}$

よって，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ をとる．　■

3 (1) 点 R は線分 QA を 1 : 2 の比に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{2\vec{q} + \vec{a}}{1+2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\vec{a}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q} - (-\vec{a})$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}}$$

(2) $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ に (1) の結果を代入すると

$$\vec{p} = \vec{q} - \vec{a} + k\left(\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}\right) = \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{q}$$

よって，点 P のえがく図形は，中心 $\boldsymbol{\left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}}$，半径 $\boldsymbol{\frac{2}{3}k + 1}$ の円

(3) (2) で求めた円 K_2 の中心を C とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a} - \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a} = \left(2 - \frac{4}{3}k\right)\vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| = \left|2 - \frac{4}{3}k\right|$$

A が円 K_2 の内部に含まれる条件は　$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| < \frac{2}{3}k + 1$

$$-\left(\frac{2}{3}k + 1\right) < 2 - \frac{4}{3}k < \frac{2}{3}k + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} < k < \frac{9}{2}}$$

■