平成 13 年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学　数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 座標平面上の 4 点 A(1, 0)，B(2, 0)，C(2, 8)，D(1, 8) を頂点とする長方形を R とする．また $0 < t < 4$ に対し，原点 O(0, 0)，点 E(4, 0)，および点 P$(t,\ 8t - 2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする．

(1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ．

(2) t が $0 < t < 4$ の範囲で動くとき，$f(t)$ を最大にする t の値と，そのときの最大値を求めよ．

2 空間のベクトル $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$，$\vec{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3)$ を考える．ただし，どちらも零ベクトルではないとする．$k = 1, 2, 3$ に対し，複素数

$$z_k = x_k + y_k i \quad (i = \sqrt{-1}\text{は虚数単位})$$

を考え，複素数 $w_k = u_k + v_k i$ ($u_k,\ v_k$ は実数) を

$$w_k = (\sqrt{3} + i) z_k$$

で定める．さらに u_k，v_k から定まるベクトル

$$\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3), \quad \vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$$

を考える．

(1) $\vec{x}$ の大きさを r，$\vec{y}$ の大きさを s，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ ($0° \leqq \theta \leqq 180°$) とするとき ${z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2$ を $r,\ s,\ \theta$ で表せ．

(2) $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の大きさが等しく，両者はたがいに垂直であるとする．このとき $\vec{u}$ と $\vec{v}$ も大きさが等しく，たがいに垂直であることを示せ．

(3) (2) の仮定のもとで，$\vec{x}$ と $\vec{u}$ のなす角を求めよ．

3 各整数 k に対し，座標平面上の点

$$\mathrm{P}_k\left(\frac{k}{500},\ 0\right), \quad \mathrm{Q}_k\left(\frac{k}{500},\ 1\right)$$

をとり，3 点 P_{k-1}，P_k，Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える．また，各自然数 n に対し

$$f_n(x) = 2 \times 10^{-nx}$$

とおく．曲線 $y = f_n(x)$ 上の動点 R が，点 (0, 2) から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき，三角形 T_k のうち，R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

解答例

1 (1) O$(0,\ 0)$，E$(4,\ 0)$，P$(t,\ 8t-2t^2)$ について $(0<t<4)$

直線 OP : $y=(8-2t)x$，　直線 EP : $y=-2t(x-4)$

直線 EP と 2 直線 $x=1,\ x=2$ との交点の y 座標は，それぞれ

$$6t,\ 4t$$

直線 OP と 2 直線 $x=1,\ x=2$ との交点の y 座標は，それぞれ

$$8-2t,\ 16-4t$$

(i) $0<t<1$ のとき　$f(t)=\dfrac{1}{2}(6t+4t)\cdot 1=5t$

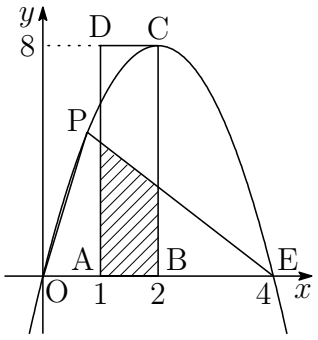
(ii) $1\leqq t\leqq 2$ のとき

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(8t-2t^2)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(8-2t)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4t=-4t^2+13t-4$$

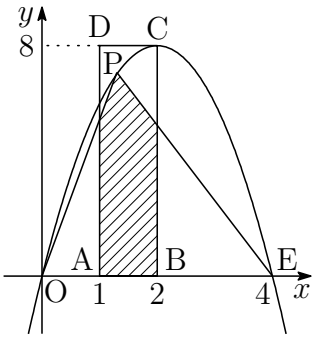
(iii) $2<t<4$ のとき　$f(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot(8-2t)+\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot(16-4t)=12-3t$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{f(t)=\begin{cases} 5t & (0<t<1) \\ -4t^2+13t-4 & (1\leqq t\leqq 2) \\ 12-3t & (2<t<4) \end{cases}}$

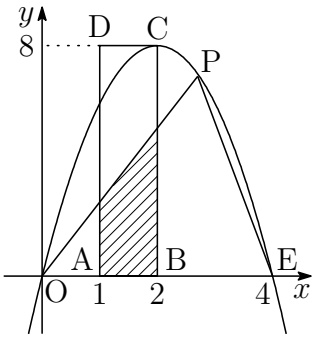
(i) $0<t<1$



(ii) $1\leqq t\leqq 2$



(iii) $2<t<4$



(2) $1\leqq t\leqq 2$ のとき　$f(t)=-4\left(t-\dfrac{13}{8}\right)^2+\dfrac{105}{16}$

(i)〜(iii) より，$f(t)$ は，$\boldsymbol{t=\dfrac{13}{8}}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{105}{16}}$ をとる．　■

2 (1) $z_k = x_k + y_k i$ より $(k = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} {z_k}^2 &= \sum_{k=1}^{3}(x_k + y_k i)^2 = \sum_{k=1}^{3}({x_k}^2 - {y_k}^2 + 2x_k y_k i) \\ &= \sum_{k=1}^{3} {x_k}^2 - \sum_{k=1}^{3} {y_k}^2 + 2i\sum_{k=1}^{3} x_k y_k \\ &= |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2 + 2i|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta \\ &= \boldsymbol{r^2 - s^2 + 2irs\cos\theta}\end{aligned}$$

(2) $(u_k + v_k i) = (\sqrt{3} + i)(x_k + y_k i)$ より $(k = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}u_k + v_k i &= (\sqrt{3} + i)(x_k + y_k i) \\ &= \sqrt{3}x_k - y_k + (x_k + \sqrt{3}y_k)i\end{aligned}$$

したがって $\quad u_k = \sqrt{3}x_k - y_k, \quad v_k = x_k + \sqrt{3}y_k \quad (k = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}|\vec{u}|^2 &= \sum_{k=1}^{3} {u_k}^2 = \sum_{k=1}^{3}(\sqrt{3}x_k - y_k)^2 \\ &= 3\sum_{k=1}^{3} {x_k}^2 + \sum_{k=1}^{3} {y_k}^2 - 2\sqrt{3}\sum_{k=1}^{3} x_k y_k \\ &= 3|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\sqrt{3}\,\vec{x}\cdot\vec{y}, \\ |\vec{v}|^2 &= \sum_{k=1}^{3} {v_k}^2 = \sum_{k=1}^{3}(x_k + \sqrt{3}y_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{3} {x_k}^2 + 3\sum_{k=1}^{3} {y_k}^2 + 2\sqrt{3}\sum_{k=1}^{3} x_k y_k \\ &= |\vec{x}|^2 + 3|\vec{y}|^2 + 2\sqrt{3}\,\vec{x}\cdot\vec{y}, \\ \vec{u}\cdot\vec{v} &= \sum_{k=1}^{3} u_k v_k = \sum_{k=1}^{3}(\sqrt{3}x_k - y_k)(x_k + \sqrt{3}y_k) \\ &= \sqrt{3}\sum_{k=1}^{3} {x_k}^2 - \sqrt{3}\sum_{k=1}^{3} {y_k}^2 + 2\sum_{k=1}^{3} x_k y_k \\ &= \sqrt{3}(|\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2) + 2\vec{x}\cdot\vec{y}\end{aligned}$$

$|\vec{x}| = |\vec{y}|,\ \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$ より $\qquad |\vec{u}| = |\vec{v}|,\ \ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

(3) (2) の結果から　$|\vec{u}| = 2|\vec{x}|$

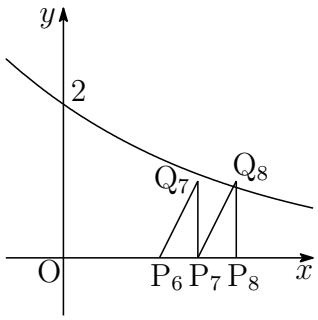
$$\vec{x}\cdot\vec{u} = \sum_{k=1}^{3} x_k u_k = \sum_{k=1}^{3} x_k(\sqrt{3}x_k - y_k)$$
$$= \sqrt{3}\sum_{k=1}^{3} {x_k}^2 - \sum_{k=1}^{3} x_k y_k = \sqrt{3}|\vec{x}|^2$$

$\vec{x}$ と $\vec{u}$ のなす角を φ とすると

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{|\vec{x}||\vec{u}|} = \frac{\sqrt{3}|\vec{x}|^2}{2|\vec{x}|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって} \quad \varphi = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

■

3 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$,



$f_n(x) = 2\times 10^{-nx}$ について

$$f_n\left(\frac{7}{500}\right) \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad f_n\left(\frac{8}{500}\right) < 1$$

を満たせばよいから

$$2\times 10^{-\frac{7n}{500}} \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad 2\times 10^{-\frac{8n}{500}} < 1$$

したがって　$10^{\frac{7n}{500}} \leqq 2$　かつ　$10^{\frac{8n}{500}} > 2$

2 式の辺々の常用対数をとると

$$\frac{7n}{500} \leqq \log_{10} 2 \quad \text{かつ} \quad \frac{8n}{500} > \log_{10} 2$$

上の 2 式から　$\dfrac{500\log_{10}2}{8} < n \leqq \dfrac{500\log_{10}2}{7}$　$\cdots(*)$

ここで　$\log_{10}2 = 0.3010$ より　$\dfrac{500\log_{10}2}{8} = 18.8125$,　$\dfrac{500\log_{10}2}{7} = 21.5$

よって，$(*)$ を満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n = 19,\ 20,\ 21}$

■