令和7年度　名古屋大学　2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1 以下の問に答えよ．

(1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第2次導関数 $f''(x)$ をもち，すべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすとする．さらに以下の極限値 $a,\ b\ (a < b)$ が存在すると仮定する．

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = b$$

このとき，$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し，関数 $g(x) = cx - f(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在することを示せ．

(2) 実数 x を変数とする関数

$$f(x) = \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

はすべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ．また，この f に対し (1) の極限値 $a,\ b$ を求めよ．

(3) (2) の関数 f および極限値 $a,\ b$ を考える．$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し (1) の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ．

2 整数 $a,\ b,\ c$ に対し次の条件を考える．

$$(*) \quad a \geqq b \geqq 0 \ \text{ かつ } \ a^2 - b^2 = c$$

以下の問に答えよ．

(1) $c = 24,\ 25,\ 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(2) p は3以上の素数，n は正の整数，$c = 4p^{2n}$ とする．このとき，条件 $(*)$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 実数 $r,\ \alpha$ は $0 < r \leqq 1$，$0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする．xy 平面内で，点 $(1,\ 0)$ を中心にもつ半径 r の円周およびその内部を C とする．C を原点 $(0,\ 0)$ を中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき，C が通過する領域の面積を求めよ．

(2) 実数 $R,\ \alpha$ は $0 < R \leqq 1$，$0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする．xyz 空間内で，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心にもつ半径 R の球面およびその内部を B とする．B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき，B が通過する領域の体積を求めよ．ただし，回転の向きは回転後の B の中心が $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$ になるように選ぶものとする．

4 コイン ①, $\cdots$, ⑥ が下図のようにマス目の中に置かれている．

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える．例えば，① を選べば，②，④ を裏返し，② を選べば，①，③，⑤ を裏返す．最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする．正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問に答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) コイン ①, $\cdots$, ⑥ をグループ A，B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる．

> n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる．

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ．

(3) p_4 を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f''(x) > 0$ より，$f'(x)$ は単調増加であるから

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = b, \quad a < c < b$$

をみたす c について，$c = f'(x_0)$ となる x_0 がただひとつ存在する．

$$g(x) = cx - f(x) = f'(x_0)x - f(x) \quad \text{ゆえに} \quad g'(x) = f'(x_0) - f'(x)$$

$g'(x)$ は単調減少であるから，$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	x_0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$g(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在する．

(2) $f(x) = \log\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Bigg/ \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

したがって

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

$$a = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \mathbf{-1}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \mathbf{1}$$

別解 $e^{f(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ を微分し，$e^{f(x)}f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ をさらに微分すると

$$e^{f(x)}f'(x)^2 + e^{f(x)}f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^{f(x)} \quad \text{ゆえに} \quad f'(x)^2 + f''(x) = 1$$

$-1 < f'(x) < 1$ であるから　$f''(x) = 1 - f'(x)^2 > 0$

(3) $c=f'(x_0)$ であるから，$k=e^{x_0}$ とおくと $(k>0)$

$$c=\frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{e^{x_0}+e^{-x_0}}=\frac{k-k^{-1}}{k+k^{-1}}=\frac{k^2-1}{k^2+1}$$

$a<c<b$ および (2) の結果から，$-1<c<1$ に注意して

$$(1-c)k^2=1+c \quad \text{ゆえに} \quad k=\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}$$

$e^{x_0}=\sqrt{\dfrac{1+c}{1-c}}$ より　$x_0=\log\sqrt{\dfrac{1+c}{1-c}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+c}{1-c}}$

$f(x_0)=\log\left(\dfrac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{k+k^{-1}}{2}\right)^2$ であるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+k^{-1}}{2}\right)^2&=\frac{1}{4}(k^2+2+k^{-2})\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1+c}{1-c}+2+\frac{1-c}{1+c}\right)=\frac{1}{1-c^2}\end{aligned}$$

ゆえに　$f(x_0)=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{1-c^2}$

したがって

$$\begin{aligned}g(x_0)&=cx_0-f(x_0)\\&=c\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+c}{1-c}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-c^2}\\&=\frac{c}{2}\log\frac{1+c}{1-c}+\frac{1}{2}\log(1+c)(1-c)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\{(1+c)\log(1+c)+(1-c)\log(1-c)\}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $(a+b)-(a-b)=2b$ ($a,\ b$ は整数)

したがって，$a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致する

- $\underline{c=24\text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=24$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}=6$$

$a \geqq b \geqq 0$ より $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}\right)=(6,\ 1),\ (3,\ 2)$

これを解いて $\boldsymbol{(a,\ b)=(7,\ 5),\ (5,\ 1)}$

- $\underline{c=25\text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=25$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに奇数であるから，$a \geqq b \geqq 0$ より

$$(a+b,\ a-b)=(25,\ 1),\ (5,\ 5)$$

これを解いて $\boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 12),\ (5,\ 0)}$

- $\underline{c=26\text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=26$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}=\frac{13}{2}$$

$\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}$ はともに整数であるから，上式を満たさない．

よって，条件を満たす $\boldsymbol{(a,\ b)}$ の組は存在しない．

(2) $(a+b)(a-b)=4p^{2n}$ より，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから ($a \geqq b \geqq 0$)

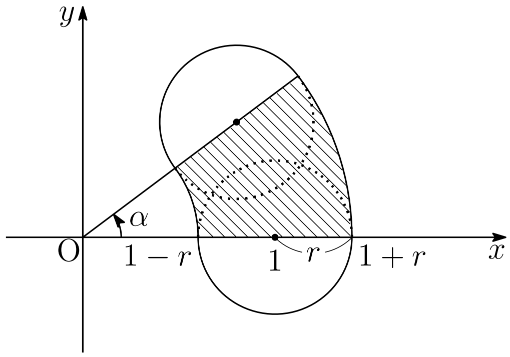
$\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a-b}{2}=p^{2n}$ ゆえに $\dfrac{a+b}{2}=p^{2n-k},\ \dfrac{a-b}{2}=p^k \quad (k=0,1,\cdots,n)$

よって $\boldsymbol{(a,\ b)=(p^{2n-k}+p^k,\ p^{2n-k}-p^k) \quad (k=0,1,2,\cdots,n)}$ ■

3 (1) 下の図の斜線部分の面積は，中心角が α で半径 $1+r$ と $1-r$ の 2 つの扇形で挟まれた部分の面積であるから

$$\frac{1}{2}(1+r)^2\alpha - \frac{1}{2}(1-r)^2\alpha = 2r\alpha$$

求める面積は，これに半径 r の面積 πr^2 を加えて　$\boldsymbol{2r\alpha + \pi r^2}$

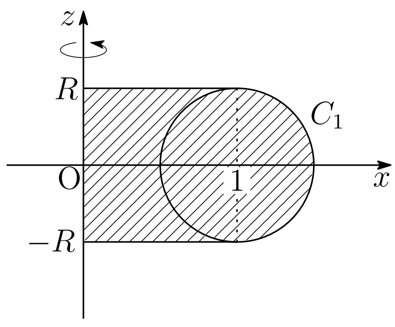


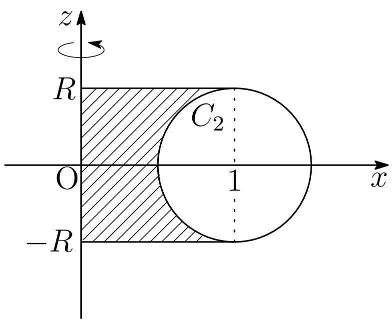
(2) 中心 (1, 0, 0)，半径 R の球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=R^2$ の zx 平面による断面は，円 $(x-1)^2+z^2=R^2$ であるから

$$x = 1 \pm \sqrt{R^2-z^2}$$

$f(z)=1+\sqrt{R^2-z^2}$，$g(z)=1-\sqrt{R^2-z^2}$ とし，$-R \leqq z \leqq R$ において，2 曲線 $C_1 : x=f(z)$，$C_2 : x=g(z)$ で囲まれた部分を z 軸のまわりに 1 回転した立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-R}^{R}\{f(z)^2-g(z)^2\}dz = \pi\int_{-R}^{R}\{f(z)+g(z)\}\{f(z)-g(z)\}\,dz \\ &= 2\pi\int_{-R}^{R}\{f(z)-g(z)\}\,dz = 2\pi\cdot\pi R^2 = 2\pi^2R^2 \end{aligned}$$





よって，求める体積は　$\dfrac{\alpha}{2\pi}V + \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \boldsymbol{\pi\alpha R^2 + \dfrac{4}{3}\pi R^3}$

補足 領域 B を xy 平面に射影した図形が (1) である (r を R とする). ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2回の操作終了時点ですべてのコインが裏向きになるのは，②と⑤が1回ずつ選ばれる場合であるから

$$p_2 = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(2) n 回の操作終了時点で，コインⓚが選ばれた回数を N_k とすると，①〜⑥のコインが裏返った回数は，すべて奇数回であるから $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$，法2に関して

$$(*) \begin{cases} \text{コイン①が裏返った回数は} & N_2 + N_4 \equiv 1 \\ \text{コイン②が裏返った回数は} & N_1 + (N_3 + N_5) \equiv 1 \\ \text{コイン③が裏返った回数は} & N_2 + N_6 \equiv 1 \\ \text{コイン④が裏返った回数は} & N_1 + N_5 \equiv 1 \\ \text{コイン⑤が裏返った回数は} & (N_2 + N_4) + N_6 \equiv 1 \\ \text{コイン⑥が裏返った回数は} & N_3 + N_5 \equiv 1 \end{cases}$$

$(*)$ の第2式と第6式より $N_1 \equiv 0$,　$(*)$ の第1式と第5式より $N_6 \equiv 0$
$N_1 \equiv 0$ と $(*)$ の第4式より $N_5 \equiv 1$，$N_6 \equiv 0$ と $(*)$ の第3式より $N_2 \equiv 1$，
$N_5 \equiv 1$ と $(*)$ の第6式より $N_3 \equiv 0$，$N_2 \equiv 1$ と $(*)$ の第1式より $N_4 \equiv 0$
以上から　$N_2 \equiv N_5 \equiv 1$，$N_1 \equiv N_3 \equiv N_4 \equiv N_6 \equiv 0$
よって　$A = \{$**②**, **⑤**$\}$，$B = \{$**①**, **③**, **④**, **⑥**$\}$

(3) (2) の結果から，4回の操作終了時点で，すべてのコインが裏向きであるのは，次の場合である．ここで $p = \frac{1}{6}$ とおく．

(i) $N_2 = 3$，$N_5 = 1$ のとき　$\frac{4!}{3!1!}p^4 = 4p^4$

(ii) $N_2 = 1$，$N_5 = 3$ のとき　$\frac{4!}{1!3!}p^4 = 4p^4$

(iii) $N_2 = 1$，$N_5 = 1$，$N_j = 2$ のとき $(j = 1, 3, 4, 6)$

$$\frac{4!}{1!1!2!}p^4 \times 4 = 48p^4$$

(i)〜(iii) より　$p_4 = 4p^4 + 4p^4 + 48p^4 = 56p^4 = 56\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \mathbf{\frac{7}{162}}$ ■