令和６年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

問題 [1] [2] [3] [4]

1 関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ から C にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする．そのような実数 t の値の範囲を求めよ．

(3) (2) において，C の 2 つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする．$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるような組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ．

2 c を 1 より大きい実数とする．また，i を虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく．複素数 z に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\quad Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める．

(1) 方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

(2) 方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ．

(3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0$，$Q(z)=0$ が共通解 β を持つとする．そのときの c の値と β を求めよ．

3 座標空間の 3 点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面を H とする．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad (s,\ t\ は非負の実数)$$

を満たすすべての点 P からなる領域を K とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ から平面 H に下した垂線の足を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

(3) 領域 K 上の点 P に対して，線分 QP 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在することを示せ．

(4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ．

$\boxed{4}$ 袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている．すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とする．袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す操作を行う．試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく．

(1) $n \geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ．

(2) $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して，等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を示せ．

(3) 自然数 k に対して，定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-x+6}{4x^2\sqrt{x}}$$

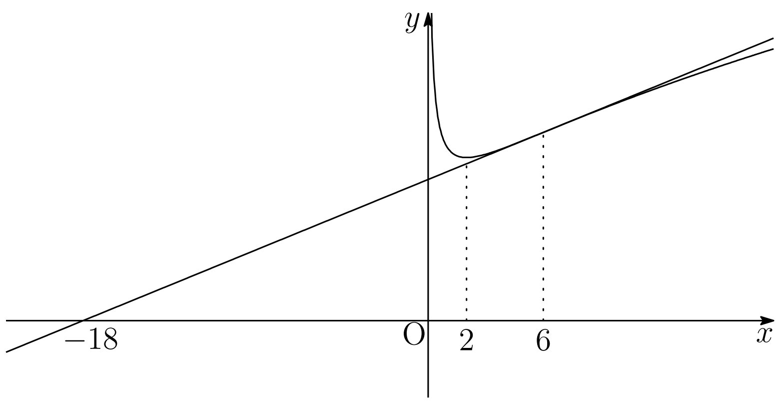
x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{8}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$

よって，極小値 $\boldsymbol{f(2)=2\sqrt{2}}$ **をとる．**

(2) (1) の結果から，$y=f(x)$ 上の変曲点 $(6,\ f(6))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{1}{3\sqrt{6}}(x-2)\quad\text{すなわち}\quad y=\frac{1}{3\sqrt{6}}(x+18)$$

$y=f(x)$ のグラフの凹凸から，t の値の範囲は　$\boldsymbol{t<-18}$



別解 (3) の 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ がともに正であるから

$$D=(t+6)^2-4\cdot1\cdot(-2t)=t^2+20t+36=(t+18)(t+2)>0,$$
$$\alpha+\beta=-(t+6)>0,\quad \alpha\beta=-2t>0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{t<-18}$

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y=\frac{\alpha-2}{2\alpha\sqrt{\alpha}}(x-\alpha)+\sqrt{\alpha}+\frac{2}{\alpha}\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{(\alpha-2)x+\alpha^2+6\alpha}{2\alpha\sqrt{\alpha}}$$

この直線が点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通るから

$$(\alpha-2)t+\alpha^2+6\alpha=0\quad \text{ゆえに}\quad \alpha^2+(t+6)\alpha-2t=0$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\beta,\ f(\beta))$ における接線についても，同様の結果を得る．2次方程式

$$x^2+(t+6)x-2t=0 \qquad (*)$$

の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-(t+6),\quad \text{ゆえに}\quad t=-(\alpha+\beta+6)$$

$\alpha,\ \beta$ がともに整数であるから，t は整数である．$(*)$ より

$$(x-2)t=-x^2-6x$$

上式から，$x\neq 2$ であることに注意して

$$t=\frac{-x^2-6x}{x-2}=-x-8-\frac{16}{x-2}$$

$x,\ t$ は整数であるから $(x>0)$

x	1	3	4	6	10	18
t	7	-27	-20	-18	-20	-27

$t<-18,\ \alpha<\beta$ であることに注意して

$$t=-27 \text{ のとき}\quad (\alpha,\ \beta)=(3,\ 18)$$
$$t=-20 \text{ のとき}\quad (\alpha,\ \beta)=(4,\ 10)$$

よって　　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(3,\ 18),\ (4,\ 10)}$

補足 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-(t+6),\quad \alpha\beta=-2t$

上の2式から t を消去して整理すると

$$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)-12=0\quad \text{ゆえに}\quad (\alpha-2)(\beta-2)=16$$

$0<\alpha<\beta$ を満たす整数 $(\alpha,\ \beta)$ は

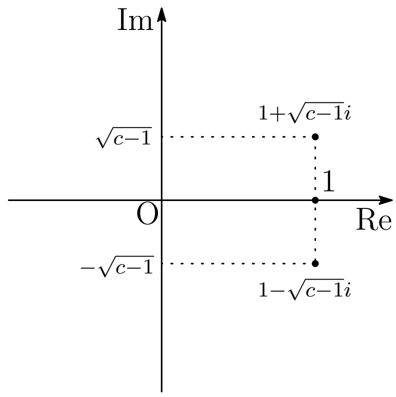
$$(\alpha-2,\ \beta-2)=(1,\ 16),\ (2,\ 8)$$

よって　　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(3,\ 18),\ (4,\ 10)}$　■

2 (1)

$$
\begin{aligned}
P(z) &= z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c \\
&= z(z^2 - 3z + 2) + c(z-1) \\
&= z(z-1)(z-2) + c(z-1) \\
&= (z-1)\{z(z-2) + c\} \\
&= (z-1)(z^2 - 2z + c)
\end{aligned}
$$

$P(z) = 0$ とすると $(c > 1)$ 　　 $\boldsymbol{z = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\,i}$



(2) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha^4 = -1$ であるから

$$
\begin{aligned}
Q(z) &= -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\
&= \alpha^3 z^3 - 3\alpha^2 z^2 + (c+2)\alpha z - c \\
&= P(\alpha z)
\end{aligned}
$$

$Q(z) = 0$ より，$P(\alpha z) = 0$ であるから，(1) の結果を利用して

$$\alpha z = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\,i \quad \text{ゆえに} \quad z = \overline{\alpha},\ \overline{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}\,i)$$

これを計算すると

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \\
\overline{\alpha}(1 \pm \sqrt{c-1}\,i) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(1 \pm \sqrt{c-1}\,i) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp \sqrt{c-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{c-1})i
\end{aligned}
$$

(複号同順)

よって，$Q(z) = 0$ の解のうち実部が最大のものは

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i}$$

(3) (2) で示したように，$Q(z)=0$ の解は，$P(z)=0$ の解を複素数平面上で原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものであるから，これらの共通解 β は

$$\beta = 1+\sqrt{c-1}\,i = \frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$$

したがって　$1 = \dfrac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}$，　$\sqrt{c-1} = \dfrac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$\sqrt{c-1} = \sqrt{2}-1$　すなわち　$\boldsymbol{c = 4-2\sqrt{2}}$

$$\boldsymbol{\beta = 1+(\sqrt{2}-1)i}$$

別解　$\beta = 1+\sqrt{c-1}\,i$，$\arg\beta = \dfrac{\pi}{8}$ であるから

$$\frac{\mathrm{Im}(\beta)}{\mathrm{Re}(\beta)} = \sqrt{c-1} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c = 4-2\sqrt{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A(3, 1, 3)，B(4, 2, 2)，C(4, 0, 1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,-1,-2)$$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0$$

(1) の結果および $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-4$ より

$$1+3s+2t=0,\quad -4+2s+6t=0$$

これを解いて　$s=-1,\ t=1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および (2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})-(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=(s+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

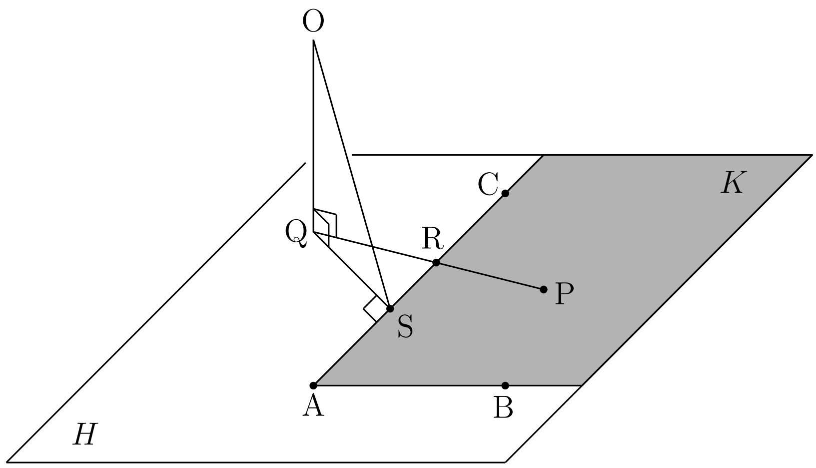
線分 QP 上の点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であるから $(0\leqq k\leqq 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+k\{(s+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}\\&=\{k(s+1)-1\}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\{k(t-1)+1\}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

R が直線 AC 上にあるとき，$k=\dfrac{1}{s+1}$ に注意して $(0\leqq k\leqq 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{s+t}{s+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$r=\dfrac{s+t}{s+1}$ であるから ($s,\ t$ は非負の実数)，r は非負の実数である．



(4) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=-2+6=4,\\&\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\\&\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&\quad=(3,\ 1,\ 3)+\frac{2}{3}(1,-1,-2)=\left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{S}\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $(s \geqq 0,\ t \geqq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+s^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&\qquad +2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2st\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= 19+3s^2+6t^2+2s-8t+4st \\
&= 6t^2+4(s-2)t+3s^2+2s+19 \\
&= 6\left\{t+\frac{1}{3}(s-2)\right\}^2+\frac{7}{3}(s+1)^2+14
\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき

$$t+\frac{1}{3}(s-2)=0,\quad s=0\quad \text{ゆえに}\quad t=\frac{2}{3}$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

よって　$\mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$ ■

$\boxed{4}$ (1) n 回の試行で赤玉を k 回取り出す確率を $P_n(k)$ とすると

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

したがって

$$f(1) = 1 - P_n(0) = \boldsymbol{1-(1-p)^n}$$
$$f(2) = 1 - P_n(0) - P_n(1) = \boldsymbol{1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}}$$

(2) 等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を変形すると $(k=1,2,\cdots,n)$

$$\begin{aligned}
f(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^p (x^k)'(1-x)^{n-k}\,dx \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\Big[\,x^k(1-x)^{n-k}\,\Big]_0^p \\
&\qquad - \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}(-1)\,dx \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} + \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx \\
&= P_n(k) + f(k+1)
\end{aligned}$$

$f(k) - f(k+1) = P_n(k)$ が成立するから $(k=1,2,\cdots n-1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1}\{f(j)-f(j+1)\} &= \sum_{j=1}^{k-1}P_n(j) \\
f(1) - f(k) &= \sum_{j=1}^{k-1}P_n(j) \\
1 - P_n(0) - f(k) &= \sum_{j=1}^{k-1}P_n(j) \\
1 - \sum_{j=0}^{k-1}P_n(j) &= f(k)
\end{aligned}$$

$k=n$ のときも成立するから　$f(k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1}P_n(j) \qquad (k=1,2,\cdots,n)$

(3) (2) で示した結果において，$f(k)$ を $f_n(k)$ とおくと

$$f_n(k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P_n(j) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

上式において，n，k をそれぞれ $2k+1$，$k+1$ とおくと，$p = \dfrac{1}{2}$ のとき，$f_{2k+1}(k+1) = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2} = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

よって $$\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}}$$

別解 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)\,dx$ において，$x = 1-y$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = -1$

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
y	$1 \longrightarrow \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\frac{1}{2}} (1-y)^k y^k(-1)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 y^k(1-y)^k\,dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k(1-x)^k\,dx \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k(1-x)^k\,dx \\ &= \int_0^1 x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{2(2k+1)!}}$$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[1]．

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$