令和５年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4

1 実数係数の 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ は相異なる複素数 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ を解に持ち，それらは全て複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする．ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ α, β と共役な複素数を表す．

(1) $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ を示せ．

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$ とおく．p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ．

(3) 座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ．

2 $0<b<a$ とする．xy 平面において，原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている．

(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ．

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする．P の x 座標 $h(r)$ を求めよ．

(3) 点 Q$(r,\ 0)$ と点 R$(a-b,\ 0)$ をとる．D の内部にある C の弧 PQ，線分 QR，および線分 RP で囲まれる図形を A とする．xyz 空間において A を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ．ただし，答えに $h(r)$ を用いてもよい．

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ．また，その r を $r(a)$ とおいたとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(r(a)-a)$ を求めよ．

3 (1) 方程式 $e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ．

(2) $y=x(x^2-3)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点の個数を求めよ．

(3) a を正の実数とし，関数 $f(x)=x(x^2-a)$ を考える．$y=f(x)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点は 1 個のみであるとする．このような a がただ 1 つ存在することを示せ．

$\boxed{4}$ n を正の整数とし，n 次の整式 $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m$ と表す．

(1) 等式 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$ を示せ．

(2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^{n} ({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m)$$

を示せ．ただし，${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_m$ は二項係数である．

(3) $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，等式 $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ を示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) α は点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$|\alpha-1|^2=1 \qquad \text{ゆえに} \qquad \alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$$

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$ より，(1) の結果から

$$\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=t, \quad \beta+\overline{\beta}=\beta\overline{\beta}=u$$

したがって，$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ を解とする 4 次方程式は

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})&=0\\ \{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}&=0\\ (x^2-tx+t)(x^2-ux+u)&=0 \qquad \text{(A)}\\ x^4-(t+u)x^3+(t+u+tu)x^2-2tux+tu&=0\end{aligned}$$

これが 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ と一致するから，同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{p=t+u,\quad q=t+u+tu,\quad r=2tu,\quad s=tu}$$

(3) $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ は，異なる 4 つの虚数であるから，(A) より $\quad t\neq u$

$$t^2-4t<0,\ \ u^2-4u<0 \quad \text{すなわち} \quad 0<u<4,\ 0<t<4\ (t\neq u)$$

(2) の結果から，$t,\ u$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-(t+u)x+tu=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-px+s=0$$

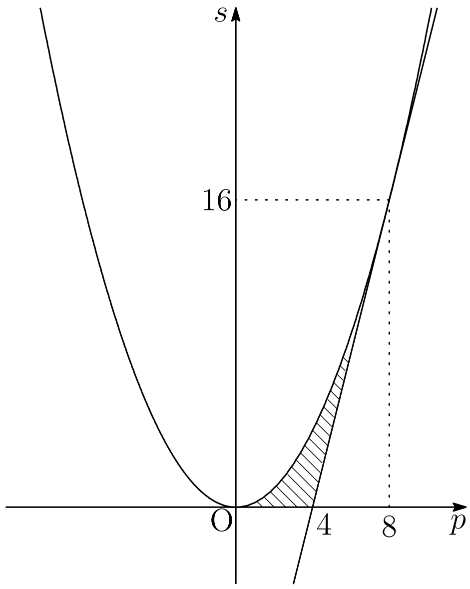
$f(x)=x^2-px+s$ とすると $\quad f(x)=\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2-4s}{4}$

2 次方程式 $f(x)=0$ は $0<x<4$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つから

$$0<\frac{p}{2}<4,\quad f\left(\frac{p}{2}\right)<0,\quad f(0)>0,\quad f(4)>0$$

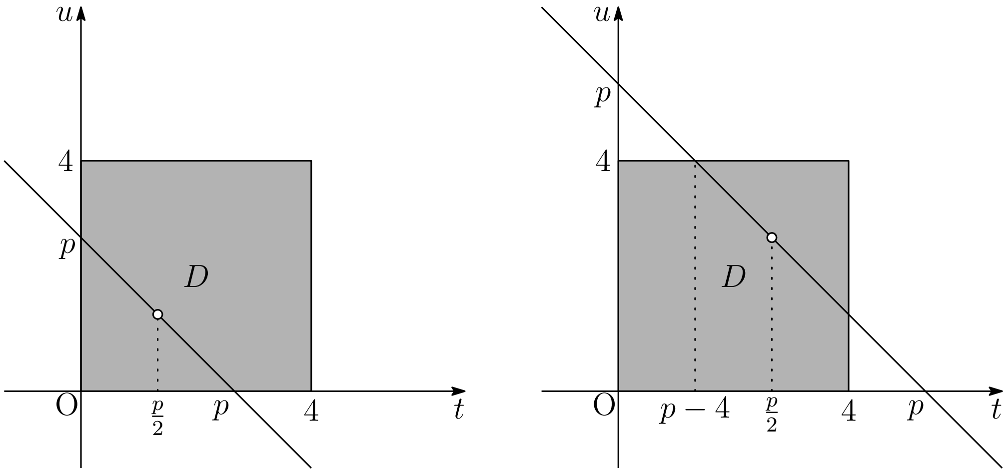
したがって　$0 < p < 8, \quad p^2 - 4s > 0, \quad s > 0, \quad -4p + s + 16 > 0$

点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．

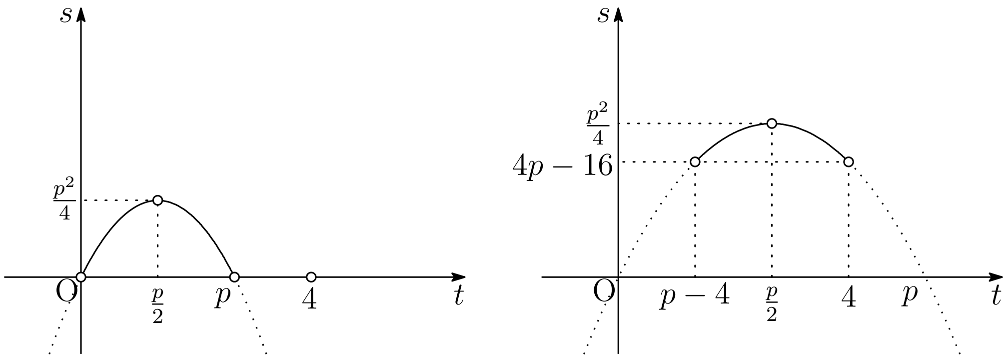


別解 $D=\{(t,\ u)\,|\,0<t<4,\ 0<u<4\}$ とし，直線 $t+u=p$ 上の点 $(t,\ u)\in D$ における $s=tu$ のとる値の範囲を求める．$t=2\mathrm{Re}(\alpha)$，$u=2\mathrm{Re}(\beta)$，$\mathrm{Re}(\alpha)\neq\mathrm{Re}(\beta)$ であるから，$t\neq u$ より，$t\neq\dfrac{p}{2}$

$$s=t(p-t)=-\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}$$



(i) $0<p\leqq 4$　　　　(ii) $4\leqq p<8$



したがって

(i) $0<p\leqq 4$ のとき　$0<s<\dfrac{s^2}{4}$

(ii) $4\leqq p<8$ のとき　$4p-16<s<\dfrac{s^2}{4}$

(i)，(ii) より，前ページと同じ領域を得る．

類題 広島大学 2018 年文系 1 番を参照[1]．

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2018.pdf $\boxed{1}$ (4)

東大 1954 年理科文科

点 $(x,\ y)$ が原点を中心とする半径 1 の円の内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲を図示せよ．

解答 $s=x+y$，$t=xy$ とすると

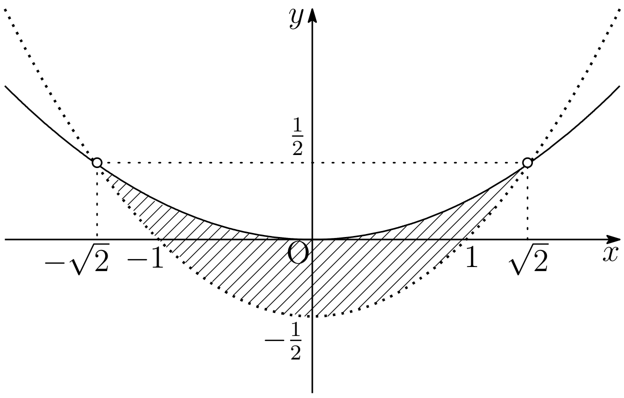
$$s^2-2t=(x+y)^2-2xy=x^2+y^2<1 \quad \text{ゆえに} \quad t>\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

$x,\ y$ を解とする 2 次方程式は　$X^2-sX+t=0$
この方程式は，実数解をもつから，係数について

$$s^2-4t \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t \leqq \frac{s^2}{4} \quad \cdots ②$$

①，② より　　$y>\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$，$y \leqq \dfrac{x^2}{4}$

求める領域は，下の図の斜線部分で，点線および ◦ を含まない．

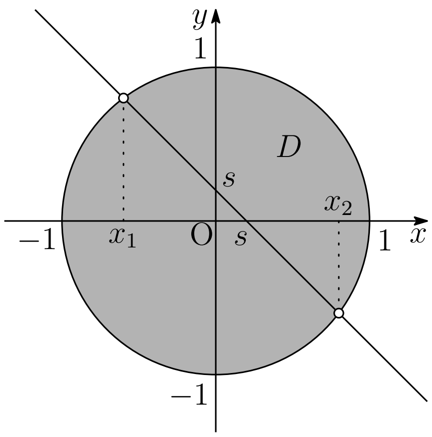


別解 $D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ とし，直線 $x+y=s$ 上の点 $(x,\ y)\in D$ における $t=xy$ のとる値の範囲を求める．

$$s^2=(x+y)^2 \leqq (1^2+1^2)(x^2+y^2)<2$$

直線 $x+y=s$ $(-\sqrt{2}<s<\sqrt{2})$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点の x 座標を $x_1,\ x_2$ とすると $(x_1<x_2)$

$$x_1=\frac{s-\sqrt{s^2-2}}{2},\quad x_2=\frac{s+\sqrt{s^2-2}}{2}$$



$t=xy=x(s-x)$ より，$f(x)=x(s-x)$ $(x_1<x<x_2)$ とおくと

$$f(x)=-\left(x-\frac{s}{2}\right)^2+\frac{s^2}{4}$$

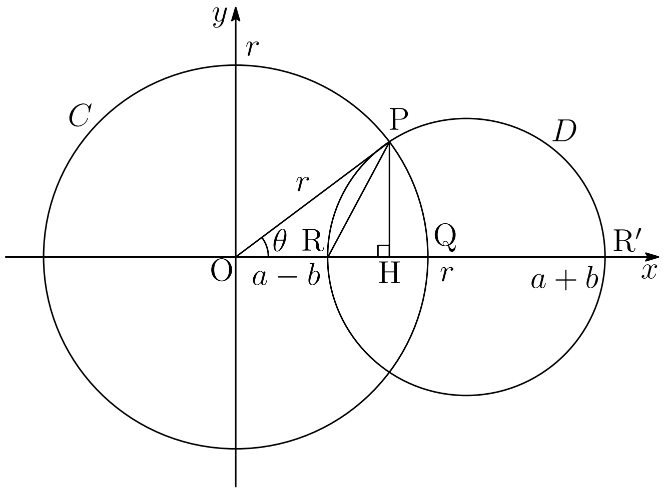
$f(x_1)=f(x_2)=\dfrac{s^2}{2}-\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{s}{2}\right)=\dfrac{s^2}{4}$ であるから，t の範囲について

$$\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}<t\leqq\frac{s^2}{4}\quad(-\sqrt{2}<s<\sqrt{2})$$

この不等式の表す領域は，前ページの図のとおりである．■

2 (1) D の x 軸の 2 交点を $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$，$\mathrm{R}'(a+b,\ 0)$ とすると，C 上の点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ は線分 RR' の両端を除く線分上にあるから

$$\boldsymbol{a-b<r<a+b}$$



(2) $C: x^2+y^2=r^2$，$D: (x-a)^2+y^2=b^2$ の辺々の差をとると

$$2ax-a^2=r^2-b^2 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}$$

よって $$\boldsymbol{h(r)=\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}}$$

(3) $h(r)=h$ とし，$\mathrm{H}(h,\ 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}V(r)&=\frac{1}{3}\pi\mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{RH}+\pi\int_h^r(r^2-x^2)\,dx\\&=\frac{\pi}{3}(r^2-h^2)\{h-(a-b)\}+\pi\Big[\,r^2x-\frac{x^3}{3}\,\Big]_h^r\\&=\frac{2\pi}{3}r^2(r-h)-\frac{\pi}{3}(a-b)(r^2-h^2)\\&=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}r^2\{r-h(r)\}-\frac{\pi}{3}(a-b)\{r^2-h(r)^2\}}\end{aligned}$$

別解 $\theta=\angle\mathrm{POQ}$ とすると，$\triangle\mathrm{POR}$ の面積は

$$\triangle\mathrm{POR}=\frac{1}{2}(a-b)r\sin\theta$$

$\triangle\mathrm{POR}$ の重心の y 座標は $\frac{1}{3}r\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}V(r)&=\frac{2\pi}{3}\int_0^\theta r^3\sin\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}(a-b)r\sin\theta\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}r\sin\theta\\&=\frac{2\pi}{3}r^3(1-\cos\theta)-\frac{\pi}{3}r^2(a-b)(1-\cos^2\theta)\\&=\frac{2\pi}{3}r^2(r-r\cos\theta)-\frac{\pi}{3}(a-b)(r^2-r^2\cos^2\theta)\\&=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}r^2\{r-h(r)\}-\frac{\pi}{3}(a-b)\{r^2-h(r)^2\}}\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から $\quad\dfrac{dh}{dr}=\dfrac{r}{a}$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{3}{\pi}V(r)\right\}'&=2\left(3r^2-2rh-r^2\cdot\frac{r}{a}\right)-(a-b)\left(2r-2h\cdot\frac{r}{a}\right)\\&=6r^2-\frac{2(a+b)}{a}rh-\frac{2}{a}r^3-2(a-b)r\\&=6r^2-\frac{2(a+b)}{a}r\cdot\frac{r^2+a^2-b^2}{2a}-\frac{2}{a}r^3-2(a-b)r\\&=-\frac{3a+b}{a^2}r^3+6r^2-\frac{(a-b)(3a^2+2ab+b^2)}{a^2}r\\&=-\frac{r}{a^2}\{r-(a-b)\}\{(3a+b)r-(3a^2+2ab+b^2)\}\end{aligned}$$

$p=\dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ とおくと $\quad r-(a-b)>0$

$$(a+b)-p=\frac{2ab}{3a+b}>0,\quad p-(a-b)=\frac{4ab+2b^2}{3a+b}>0$$

r	$a-b$	$\cdots$	p	$\cdots$	$a+b$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

よって $\quad\boldsymbol{r=\dfrac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}}$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\{r(a)-a\}&=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}-a\right)\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{ab+b^2}{3a+b}=\lim_{a\to\infty}\frac{b+\frac{b^2}{a}}{3+\frac{b}{a}}=\boldsymbol{\frac{b}{3}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $e^x = \dfrac{2x^3}{x-1}$ の実数解は，$2x^3-(x-1)e^x=0$ の解と一致する．

$g(x)=2x^3-(x-1)e^x$ とおくと

$$g'(x)=6x^2-xe^x=x(6x-e^x)$$

$x<0$ において，常に $g'(x)>0$ であるから，$x<0$ において単調増加．

$$g(-1)=\frac{2}{e}-2<0,\quad g(0)=1>0$$

よって，$g(x)=0$ を満たす $c<0$ $(-1<c<0)$ が，ただ一つ存在する．

(2) $y=x(x^2-3)$ と $y=e^x$ のグラフの共有点の x 座標は，$y=x^2-\dfrac{e^x}{x}$ と $y=3$ のグラフの共有点の x 座標と一致する．$h(x)=x^2-\dfrac{e^x}{x}$ とすると

$$h'(x)=2x-\frac{(x-1)e^x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

(1) の結果から

x	$\cdots$	c	$\cdots$	0
$h'(x)$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$h(-1)>h(c)$，$h(-1)=1+\dfrac{1}{e}<3$ より　$h(c)<3$

$$\lim_{h\to-\infty}h(x)=\infty,\quad \lim_{h\to-0}h(x)=\infty$$

よって，求める共有点の個数は　**2 個**

(3) $y=f(x)$ と $y=e^x$ の共有点の x 座標は，$y=h(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の x 座標と一致する．この共有点が 1 個のみであるから，(2) の結果から，$a=h(c)$ のただ 1 つ存在する．■

$\boxed{4}$ (1) $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m x^m \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると $\quad \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} P_n(x+1) &= \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m (1+x)^m \\ &= \sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m ({}_m\mathrm{C}_0 + {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_m\mathrm{C}_m x^m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} ({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m) \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\quad P_n(x+1) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^k$

$P_{n+1}(x) = xP_n(x+1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{B}_m x^m &= x \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{m=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k x^{k+1} \end{aligned}$$

上式の x^{k+1} の項の係数を比較すると

$${}_{n+1}B_{k+1} = \sum_{m=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_k \quad \text{よって} \quad \sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$$

第１種スターリング数

${}_n\mathrm{B}_m$ は第１種スターリング数 (Stirling numbers of the first kind) である．

$0 \leqq m \leqq n$ について

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x+n-1)P_{n-1}(x) = (x+n-1)\sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^m \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^{m+1} + (n-1)\sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{B}_m x^m \end{aligned}$$

上式の x^m の項の係数を比較すると，次式を得る．

$$ {}_n\mathrm{B}_m = {}_{n-1}\mathrm{B}_{m-1} + (n-1)_{n-1}\mathrm{B}_m \tag{$*$}$$

また，便宜上，${}_0\mathrm{B}_0 = 1$ と定義する．正の整数 n について次が成り立つ．

$$ {}_n\mathrm{B}_0 = 0, \quad {}_n\mathrm{B}_n = 1 \tag{$**$}$$

$(*)$，$(**)$ から ${}_n\mathrm{B}_m$ は順次求めることもできる．

$n \backslash m$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

例えば，$p_1(k)=k$，$p_2(k)=k(k+1)$，$p_3(k)=k(k+1)(k+2)$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_1(k) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-(k-1)k\} = \frac{1}{2}n(n+1) \\
\sum_{k=1}^{n} p_2(k) &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\
\sum_{k=1}^{n} p_3(k) &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-k\} = \sum_{k=1}^{n}\{p_2(k)-p_1(k)\} \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-3k(k+1)+k\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{p_3(k)-3p_2(k)+p_1(k)\} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\cdot\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\} \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

補足 k^m は $p_j(k)$ $(1 \leqq j \leqq m)$ の線形結合で表されるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$ は $n(n+1)$ を因数にもつ．

参考 第 2 種スターリング数および数列のべき乗和については，大分大学 2014 年 8 番を参照[2]． ■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2014.pdf $\boxed{8}$