令和４年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4

1 a，b を実数とする．

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x + b$ とする．b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ．

2 1 つのサイコロを 3 回投げる．1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする．

(1) $ab + 2c \geqq abc$ となる確率を求めよ．

(2) $ab + 2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ．

3 複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えられている．ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O，A，B，C，D，E とする．互いに異なる 0 でない複素数 α，β，γ が，

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi, \quad 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0,$$
$$2\gamma^2 - (3\alpha + \beta + 2)\gamma + (\alpha + 1)(\alpha + \beta) = 0$$

を満たし，α，β，γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする．

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ．

(2) 組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ．

4 関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ を満たすとする．ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう．以下，n は正の整数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \infty$ を示せ．

(2) 区間 $y > 2$ において関数 $F_n(y)$ を $\displaystyle F_n(y) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}\,dx$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$ を示せ．また $2+\dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ．

(3) (2) の a_n について，不等式 $a_n < 4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^3=(x-a)^2(x+2a)+3a^2x-2a^3$ より，求める余りは　$\boldsymbol{3a^2x-2a^3}$

(2) $x^3=(x^2+\alpha x+\beta)(x-\alpha)+(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta$

x^3 を $x^2+\alpha x+\beta$ で割った余りが $3x+b$ であるから

$$\alpha^2-\beta=3,\quad \alpha\beta=b \qquad (*)$$

上の 2 式から β を消去すると　$b=\alpha^3-3\alpha$

$g(\alpha)=\alpha^3-3\alpha$ とすると

$$g'(\alpha)=3\alpha^2-3=3(\alpha+1)(\alpha-1)$$

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$(*)$ の第 1 式から，α の値により，一意的に β が決定するから，$f(x)$ の個数は，方程式 $b=g(\alpha)$ の解の個数と一致する．よって

$\boldsymbol{-2<b<2}$ **のとき　3 個**
$\boldsymbol{b=\pm 2}$ **のとき　2 個**
$\boldsymbol{b<-2,\ 2<b}$ **のとき　1 個**

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $ab+2c \geqq abc$ より，$(ab-2)c \leqq ab$ であるから，$ab \leqq 2$ のとき，c は任意．

$ab \geqq 3$ のとき $\quad c \leqq \dfrac{ab}{ab-2} = 1 + \dfrac{2}{ab-2} \quad \cdots(*)$

とくに，$ab \geqq 5$ のとき $\quad c < 2 \quad$ ゆえに $\quad c = 1$

(i) $ab \leqq 2$，すなわち，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ のとき

$$c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(ii) $ab = 3$，すなわち，$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1,\ 2,\ 3$$

(iii) $ab = 4$，すなわち，$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1,\ 2$$

(iv) $ab \geqq 5$ のとき，$c=1$ で，$(a,\ b)$ の組は，(i)～(iii) を除いた

$$6^2 - (3+2+3) = 28 \text{ 通り}$$

(i)～(iv) より，求める確率は

$$\frac{3{\cdot}6 + 2{\cdot}3 + 3{\cdot}2 + 28{\cdot}1}{6^3} = \frac{58}{216} = \mathbf{\frac{29}{108}}$$

(2) まず「$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素」であることは「ab と $2c$ が互いに素」であるための必要十分条件であることを示す．

$(\Longrightarrow)$ ab と $2c$ が素数 p を因数にもつならば，$ab+2c$ および $2abc(=ab{\cdot}2c)$ は素数 p を因数にもち，$ab+2c$ と $2abc$ はともに p を因数にもつ．

$(\Longleftarrow)$ $ab+2c$ と $2abc(=ab{\cdot}2c)$ が素数 q を因数にもつならば，$ab{\cdot}2c$ が素数 q を因数にもつから，ab または $2c$ が素数 q を因数にもつ．

$$2c = (ab+2c) - ab, \quad ab = (ab+2c) - 2c$$

ab が素数 q を因数にもつとき上の第 1 式から $2c$ も q を因数にもち，$2c$ が素数 q を因数にもつとき上の第 2 式から ab も素数 q を因数にもつ．(証終)

したがって，ab と $2c$ が互いに素となる確率を求めればよい．

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき　$c=1,2,3,4,5,6$

$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4,5$

$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$ のとき　$c=1,2,3,4,6$

$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4$

よって，求める確率は

$$\frac{1\cdot 6+3\cdot 4+3\cdot 5+2\cdot 3}{6^3}=\frac{39}{216}=\boldsymbol{\frac{13}{72}}$$

■

$\boxed{3}$ (1) $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ より $(\alpha\neq 0)$ $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+4=0$

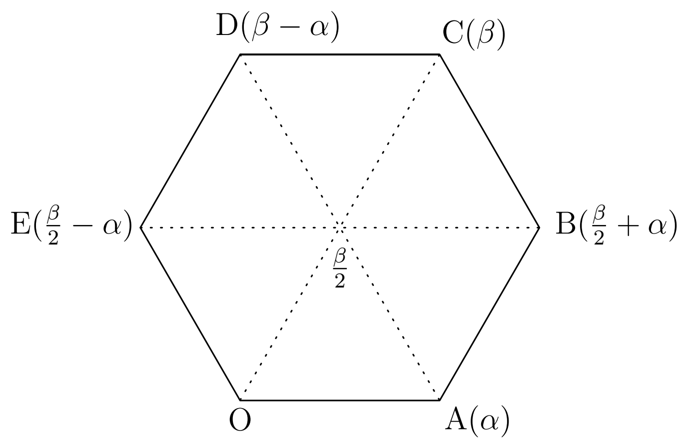
$0\leqq\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\leqq\pi$ に注意して　$\boldsymbol{\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i}$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$|\beta|=2|\alpha|,\quad \angle\alpha 0\beta=\frac{\pi}{3}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\alpha}\ \textbf{は A},\ \boldsymbol{\beta}\ \textbf{は C}$$

(2) (1) の結果から，点 B，D，E を α, β を用いて表すと

$$\mathrm{B}\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\right),\quad \mathrm{D}\left(\beta-\alpha\right),\quad \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)$$



$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$ より

$$(2\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-1)=0$$

A(α)，C(β) の中点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は γ ではないから　$\gamma=\alpha+1$

(i) γ が点 B であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma = \alpha + 1 = \frac{\beta}{2} + \alpha, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

上の第 1 式から　$\beta = 2$　これを第 2 式に代入して　$\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

また第 1 式から　$\gamma = \dfrac{3 - \sqrt{3}i}{2}$

(ii) γ が点 D であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma = \alpha + 1 = \beta - \alpha, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

上の第 1 式から　$\beta = 2\alpha + 1$　これを第 2 式に代入して

$$\frac{2\alpha + 1}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\alpha} = -1 + \sqrt{3}i$$

$\alpha = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{4}$ であるから　$\beta = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2}$,　$\gamma = \dfrac{3 - \sqrt{3}i}{4}$

(iii) γ が点 E であるとき，(1) の結果を用いて

$$\gamma = \alpha + 1 = \frac{\beta}{2} - \alpha, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

上の第 1 式から　$\beta = 4\alpha + 2$　これを第 2 式に代入して

$$\frac{4\alpha + 2}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\alpha} = -3 + \sqrt{3}i$$

$\alpha = \dfrac{-3 - \sqrt{3}i}{6}$ であるから　$\beta = -\dfrac{2\sqrt{3}i}{3}$,　$\gamma = \dfrac{3 - \sqrt{3}i}{6}$

(i)〜(iii) より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{(\alpha,\ \beta,\ \gamma)} = & \boldsymbol{\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2},\ 2,\ \frac{3 - \sqrt{3}i}{2}\right)}, \\
& \boldsymbol{\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{4},\ \frac{1 - \sqrt{3}i}{2},\ \frac{3 - \sqrt{3}i}{4}\right)}, \\
& \boldsymbol{\left(\frac{-3 - \sqrt{3}i}{6}, -\frac{2\sqrt{3}i}{3},\ \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}\right)}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ であるから，区間 $0 \leqq x \leqq 2-\dfrac{1}{n}$ において (n は正の整数)

$$\frac{f(x)}{2-x} \geqq \frac{f(0)}{2-x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{f(x)}{2-x} \geqq \frac{1}{2-x}$$

したがって

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \geqq \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}\,dx = -\Big[\ \log(2-x)\ \Big]_0^{2-\frac{1}{n}} = \log 2n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log 2n = \infty$ より $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \infty$

(2) (1) と同様に，$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq y$ において，$\dfrac{f(x)}{x-2} > \dfrac{1}{x-2}$ より

$$\begin{aligned} F_n(y) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}\,dx &> \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= \Big[\ \log(x-2)\ \Big]_{2+\frac{1}{n}}^{y} = \log n(y-2) \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{y\to\infty} \log n(y-2) = \infty$ より $\quad \displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$

与えられた等式 (A) $\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x} = 0$ より

$$\int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{x-2} = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \quad \text{ゆえに} \quad F_n(a_n) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx \qquad (*)$$

$F_n'(y) = \dfrac{f(y)}{y-2}$ より，$y>2$ において $\quad F_n'(y) > 0$

$F_n(y)$ から $\quad F_n\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 0.\quad (*)$ より $\quad F_n\left(2+\dfrac{1}{n}\right) < F_n(a_n)$

$$F_n(4) - F_n(a_n) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{x-2}\,dx - \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$ について，$x=4-t$ とおくと

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx = \int_4^{2+\frac{1}{n}} \frac{f(4-t)}{t-2}\,(-dt) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(4-x)}{x-2}\,dx$$

$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 4$ において $4-x<x$ で，$f(x)$ が増加関数であるから

$$f(x)-f(4-x)>0$$

が成立する．これから

$$\begin{aligned} F_n(4)-F_n(a_n) &= \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{x-2}\,dx - \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(4-x)}{x-2}\,dx \\ &= \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)-f(4-x)}{x-2}\,dx > 0 \end{aligned}$$

したがって

$$F_n\left(2+\frac{1}{n}\right) < F_n(a_n) < F_n(4) \qquad (**)$$

$F_n(y)$ は単調増加なので，$(**)$，すなわち，(A) を満たす a_n はただ 1 つ存在する．

(3) $F_n(y)$ は単調増加なので，$(**)$ より，すべての n について，不等式

$$a_n < 4$$

が成立する． ■