令和３年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ a の正の実数とする．放物線 $y=x^2$ を C_1，放物線 $y=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ を C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ．

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 $\ell,\ \ell'$ を持つような a の範囲を求めよ．ただし C_1 と C_2 の共通接線とは，C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである．

以下，a は (2) で求めた範囲にあるとし，$\ell,\ \ell'$ を C_1 と C_2 の異なる 2 つの共通接線とする．

(3) $\ell,\ \ell'$ の交点の座標を求めよ．

(4) C_1 と $\ell,\ \ell'$ で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を D_2 とする．D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

(5) $S(a)$ を (4) の通りとする．a が (2) で求めた範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 4 つの実数を $\alpha=\log_2 3,\ \beta=\log_3 5,\ \gamma=\log_5 2,\ \delta=\dfrac{3}{2}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha\beta\gamma=1$ を示せ．

(2) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ を小さい順に並べよ．

(3) $p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とし，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ とする．このとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$ および $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 から 12 までの数字が下の図のように並べて書かれている．以下のルール (a), (b) と (終了条件) を用いたゲームを行う．ゲームを開始すると最初に (a) を行い，(終了条件) が満たされたならゲームを終了する．そうでなければ (終了条件) が満たされるまで (b) の操作を繰り返す．ただし，(a) と (b) における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする．

(a) 1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，下の図において選んだ数字を丸で囲み，その上に石を置く．

(b) 石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く．例えば，石が 6 の位置に置かれているときは，その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7，8，9，10，12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く．

(終了条件) 5，9，11，12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている．

ゲームの終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする．以下の問に答えよ．

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(1) 確率 p_2 を求めよ．

(2) 確率 p_5 と p_{11} を求めよ．

(3) 確率 p_5，p_9，p_{11}，p_{12} のうち最も大きいものの値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $0 \leqq a < 1$ を満たす実数 a に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 3\left[\, a_n + \frac{1}{2} \,\right] - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

という漸化式で定める．ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．以下の問に答えよ．

(1) a が $0 \leqq a < 1$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y) = (a_1,\ a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ．

(2) $a_n - [a_n] \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$a_n < a_{n+1}$ であることを示せ．

(3) $a_n > a_{n+1}$ ならば，$a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ であることを示せ．

(4) ある 2 以上の自然数 k に対して，$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ が成り立つとする．このとき a_k を a の式で表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1 : y = x^2$ より　$y' = 2x$

C_1 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2tx - t^2}$$

(2) (1) で求めた接線と $C_2 : y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$ から y を消去すると

$$2tx - t^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$$

これを x について整理すると

$$x^2 + 2(t - 2a)x + 4a^2 - 4a^4 - t^2 = 0$$

このとき，上の x の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$D/4 = (t - 2a)^2 - (4a^2 - 4a^4 - t^2) = 0$$

これを t について整理すると　$t^2 - 2at + 2a^4 = 0 \quad \cdots (*)$

C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 $\ell,\ \ell'$ をもつとき，その 2 つの接点の x 座標，すなわち，2 次方程式 $(*)$ の解が異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 2a^4 = a^2(1 - 2a^2) > 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの実数解 $p,\ q$ と係数の関係により

$$(**) \quad p + q = 2a, \quad pq = 2a^4$$

C_1 上の 2 点 $(p,\ p^2),\ (q,\ q^2)$ における接線をそれぞれ $\ell,\ \ell'$ とすると，(1) の結果から

$$\ell : y = 2px - p^2, \quad \ell' : y = 2qx - q^2$$

$\ell,\ \ell'$ の交点の座標は　$\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)$　すなわち　$\boldsymbol{(a,\ 2a^4)}$

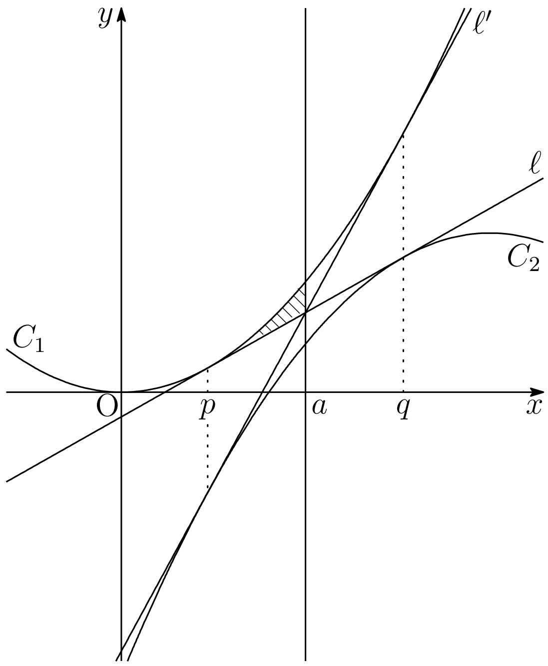
(4) $p<q$ とすると，D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_p^a \{x^2-(2px-p^2)\}dx = \int_p^a (x-p)^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\,(x-p)^3\,\Big]_p^a = \frac{1}{3}(a-p)^3 \end{aligned}$$

$2a=p+q$ より　　$S(a)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{q-p}{2}\right)^3$

$(**)$ より　$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=(2a)^2-4\cdot 2a^4=4(a^2-2a^4)$

$p<q$ より　$\dfrac{q-p}{2}=\sqrt{a^2-2a^4}$　　よって　$\boldsymbol{S(a)=\dfrac{1}{3}(a^2-2a^4)^{\frac{3}{2}}}$



(5) (4) の結果から　$S=\dfrac{1}{3}\left\{-2\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}\right\}^{\frac{3}{2}}$

(2) の結果に注意すると，$S(a)$ の最大値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{48\sqrt{2}}}$$

補足 D_1 と $x \leqq a$ の共通部分の面積と D_1 と $x \geqq a$ の共通部分の面積は等しい．また，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ を結ぶ直線 PQ と C_1 で囲まれた部分の面積は $4S(a)$ に等しい[1]．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha = \log_2 3,\ \beta = \log_3 5,\ \gamma = \log_5 2$ より

$$\alpha\beta\gamma = \log_2 3 \log_3 5 \log_5 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = 1$$

補足 積における真数の交換法則 $\log_a A \log_b B = \log_a B \log_b A$ を用いると

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= \log_2 3 \log_3 5 \log_5 2 = \log_2 5 \log_3 3 \log_5 2 \\ &= \log_2 5 \log_5 2 = \log_2 2 \log_5 5 = 1\end{aligned}$$

(2) $\alpha = \log_2 3,\ \beta = \log_3 5,\ \gamma = \log_5 2,\ \delta = \dfrac{3}{2}$ より

$$\log_5 2 < 1 < \log_3 5 < \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 3$$

よって $\boldsymbol{\gamma < \beta < \delta < \alpha}$

(3) (1) の結果から

$$q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \qquad (*)$$

また，$p = \alpha + \beta + \gamma$，$\alpha\beta\gamma = 1$ であるから

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + px^2 + qx + 1 \\ &= x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma \\ &= (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) \qquad (**)\end{aligned}$$

$\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \dfrac{1}{2}$ および $(*)$ から $\gamma < \dfrac{1}{2} < 1 < \beta < \dfrac{3}{2} < \alpha$

$$-\alpha < -\frac{3}{2} < -\beta < -1 < -\frac{1}{2} < -\gamma$$

$(**)$ より $\boldsymbol{f\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0,\ \ f(-1) < 0,\ \ f\left(-\dfrac{3}{2}\right) > 0}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $i=1,2,3,4,6,7,8,10$ とし，i の位置にある石が移動可能なそれぞれの位置に移動する確率を q_i とすると

$$q_1=\frac{1}{7},\quad q_2=q_6=\frac{1}{5},\quad q_3=q_7=\frac{1}{3},\quad q_4=\frac{1}{2},\quad q_8=1,\quad q_{10}=\frac{1}{2}$$

(1) $p_1=\dfrac{1}{12}$ であるから，求める確率 p_2 は

$$p_2=p_1q_1+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{2}{21}}$$

(2) (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}
p_3&=p_1q_1+p_2q_2+\frac{1}{12}=p_2+p_2q_2=p_2(1+q_2)\\
&=\frac{2}{21}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{35}\\
p_4&=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+\frac{1}{12}=p_3+p_3q_3=p_3(1+q_3)\\
&=\frac{4}{35}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{105}\\
p_5&=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+p_4q_4+\frac{1}{12}=p_4+p_4q_4=p_4(1+q_4)\\
&=\frac{16}{105}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\mathbf{\frac{8}{35}}\\
p_6&=p_1q_1+\frac{1}{12}=p_2\\
p_7&=p_2q_2+p_6q_6+\frac{1}{12}=p_2q_2+p_2q_2+\frac{1}{12}=2p_2q_2+\frac{1}{12}\\
&=2\cdot\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{12}=\frac{17}{140}\\
p_{10}&=p_1q_1+p_6q_6+\frac{1}{12}=p_1q_1+p_2q_2+\frac{1}{12}=p_3=\frac{4}{35}\\
p_{11}&=p_2q_2+p_7q_7+p_{10}q_{10}+\frac{1}{12}\\
&=\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{5}+\frac{17}{140}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{35}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{1}{5}}
\end{aligned}$$

(3) (1),(2) の結果から

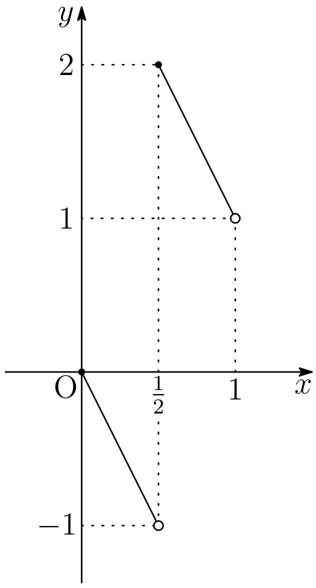
$$p_{12}=p_1q_1+p_6q_6+p_{10}q_{10}+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{35}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{6}{35}$$

また $p_9=1-(p_5+p_{11}+p_{12})=1-\left(\dfrac{8}{35}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{6}{35}\right)=\dfrac{2}{5}$

以上の結果から，最大は $\boldsymbol{p_9=\frac{2}{5}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 与えられた漸化式から，$0 \leqq a < 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a, \\
a_2 &= 3\left[\, a_1 + \frac{1}{2} \,\right] - 2a_1 \\
&= 3\left[\, a + \frac{1}{2} \,\right] - 2a \\
&= \begin{cases} -2a & \left(0 \leqq a < \dfrac{1}{2}\right) \\ -2a + 3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq a < 1\right) \end{cases}
\end{aligned}
$$



よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は右の図のとおり．

$$
y = \begin{cases} -2x & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ -2x + 3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right) \end{cases}
$$

(2) $s_n = a_n - [a_n]$ とおくと，$a_n = [a_n] + s_n$，$\dfrac{1}{2} \leqq s_n < 1$ より

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3\left[\, a_n + \frac{1}{2} \,\right] - 2a_n = 3\left[\, [a_n] + s_n + \frac{1}{2} \,\right] - 2([a_n] + s_n) \\
&= 3\left[\, [a_n] + 1 + \left(s_n - \frac{1}{2}\right) \,\right] - 2([a_n] + s_n) \\
&= 3([a_n] + 1) - 2([a_n] + s_n) = [a_n] + 3 - 2s_n \\
&= [a_n] + s_n + 3(1 - s_n) = a_n + 3(1 - s_n) > a_n
\end{aligned}
$$

(3) (2) の結論の対偶により　$a_n \geqq a_{n+1} \implies a_n - [a_n] < \dfrac{1}{2}$

$a_n > a_{n+1} \implies a_n \geqq a_{n+1}$ であるから

$$a_n > a_{n+1} \implies a_n - [a_n] < \frac{1}{2}$$

このとき，$0 \leqq s_n < \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3\left[\ a_n + \frac{1}{2}\ \right] - 2a_n = 3\left[\ [a_n] + s_n + \frac{1}{2}\ \right] - 2a_n \\ &= 3[a_n] - 2a_n \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

ここで，$s_n = 0$ と仮定すると，$[a_n] = a_n$ であるから，上式より，$a_{n+1} = a_n$ となり，条件に反する．したがって，$s_n \neq 0$ より，$0 < s_n < \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3[a_n] - 2([a_n] + s_n) \\ &= [a_n] - 1 + (1 - 2s_n) \qquad (0 < 1 - 2s_n < 1) \end{aligned}$$

よって　　$[a_{n+1}] = [a_n] - 1 \quad \cdots(**)$

(4) $a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ であるから，$(*)$，$(**)$ が $n = 1, 2, \cdots, k$ について成立する．$0 \leqq a < 1$ より，$[a] = 0$ であるから，$(**)$ により

$$[a_n] = -n + 1$$

これを $(*)$ に代入すると　$a_{n+1} = 3(-n+1) - 2a_n$

$$a_{n+1} + (n+1) - \frac{4}{3} = -2\left(a_n + n - \frac{4}{3}\right)$$

$\left\{a_n + n - \dfrac{4}{3}\right\}$ は，初項 $a - \dfrac{1}{3}$，公比 -2 の等比数列であるから $(n = 1, 2, \cdots, k)$

$$a_n + n - \frac{4}{3} = \left(a - \frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}$$

よって　　$\boldsymbol{a_k = \left(a - \dfrac{1}{3}\right)(-2)^{k-1} - k + \dfrac{4}{3}}$