令和２年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

1 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分を C_1，$x < 0$ の部分を C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 $ax - by = 1$ が C_1，C_2 の両方と 1 点ずつで交わるための a，b の条件を求めよ．

(2) a，b は (1) で求めた条件をみたすものとする．点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとり，直線 $ax - by = 1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする．このとき $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を a，b を用いて表せ．

(3) 面積 S の最小値を求めよ．また，その最小値をとるための a，b の条件を求めよ．

2 3 つの数 2，m^2+1，m^4+1 が相異なる素数となる正の整数 m が 1 つ固定されているものとする．以下の問に答えよ．

(1) 3 つの数 2，m^2+1，m^4+1 のうち，1 つを a とし，残りの 2 つを b，c とする．このとき $a^2 < bc$ となる a をすべて求めよ．

(2) 正の整数 x，y が $(x+y)(x^2+2y^2+2xy) = 2(m^2+1)(m^4+1)$ をみたしているとき x，y を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) > 0$ をみたしているとする．区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(2) $f(x)$ を (1) の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

を示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする．このとき，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

を示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う．

(i) 正方形の4つの頂点を反時計回りにA，B，C，Dとする．両者はコマを1つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマはA, 後攻の持ちゴマはCに置いてあるとする．

(ii) 先攻から始めて，交互にサイコロを振る．ただしサイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする．出た目を3で割った余りが0のときコマは動かさない．また余りが1のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが2のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす．もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする．

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち2以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ．ただし正の実数 a に対し $[a]$ は，その整数部分 ($k \leqq a < k+1$ となる整数 k) を表す．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 直線 $ax-by=1$ は，$b=0$ のとき，直線 $ax=1$ は y 軸と平行であり，C_1 と C_2 の両方で共有点をもつことはない．$b\neq 0$ より，直線 $y=\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ と双曲線 $x^2-y^2=1$ から y を消去すると

$$x^2-\left(\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\right)^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2-b^2)x^2-2ax+b^2+1=0 \qquad (*)$$

(i) $a^2-b^2=0$ のとき，方程式 $(*)$ の解は 1 個となり，不適．

(ii) $a^2-b^2\neq 0$ のとき，2 次方程式 $(*)$ の解を $p,\ q$ とすると $(p<q)$，条件より，2 数の解の積が負であるから，解と係数の関係により

$$pq=\frac{b^2+1}{a^2-b^2}<0 \quad \text{ゆえに} \quad b^2>a^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{|b|>|a|}$$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解が $p,\ q$ であるから $(p<q)$

$$\begin{aligned} q-p &= \frac{-a+|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}-\frac{-a-|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2} \\ &= \frac{2|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2} \end{aligned}$$

直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 との交点をそれぞれ P，Q とすると

$$\mathrm{P}\left(p,\ \frac{ap-1}{b}\right),\quad \mathrm{Q}\left(q,\ \frac{aq-1}{b}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PQ}=\frac{(q-p)\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$$

したがって　$\mathrm{PQ}=\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ から直線 $ax-by-1=0$ までの距離を d とすると

$$d=\frac{|a^2-b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\triangle$APQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d=\boldsymbol{\frac{(b^2-a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{b^2-a^2}}$$

(3) $t=b^2-a^2$ とすると $(t>0)$ $\qquad S=\dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{2}}t-(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t^2}=\frac{(t-2)\sqrt{t+1}}{2t^2}$$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$
S		$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

$t=2$，すなわち，$\boldsymbol{b^2-a^2=2}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ **をとる．**

別解 $S=\dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t}=\left(\dfrac{t+1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(t^{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$t>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}=\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}+\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}+\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

よって $\qquad S\geqq\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2}=\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\quad\text{すなわち}\quad t=2$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 3 つの数 $2,\ m^2+1,\ m^4+1$ が相異なる素数であるから (m は正の整数)

$$m\neq 1\quad\text{ゆえに}\quad 2<m^2+1<m^4+1$$

(i) $a=2$ のとき

$$bc=(m^2+1)(m^4+1)\geqq(2^2+1)(2^4+1)>2^2$$

したがって $\qquad a^2<bc$

(ii) $a=m^2+1$ のとき

$$bc-a^2=2(m^4+1)-(m^2+1)^2=(m^2-1)^2>0$$

したがって $\qquad a^2<bc$

(iii) $a = m^4 + 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
bc - a^2 &= 2(m^2+1) - (m^4+1)^2 \\
&< 2(m^4+1) - (m^4+1)^2 = (m^4+1)(1-m^4) < 0
\end{aligned}
$$

したがって　　$a^2 > bc$

(i)〜(iii) より，$a^2 < bc$ を満たす a は　　$\boldsymbol{a = 2,\ m^2+1}$

(2) 与えられた条件から，正の整数 x，y に対して

$$(x+y)\{(x+y)^2+y^2\} = 2(m^2+1)(m^4+1) \quad \cdots (*)$$

をみたすとき，$(*)$ の右辺が 3 つ相異なる素数の積であること

$$x + y < (x+y)^2 + y^2, \quad 2(m^2+1) < m^4+1$$

に注意して場合分けを行う．

(i) $x+y=2$，$(x+y)^2+y^2 = (m^2+1)(m^4+1)$ のとき
$x = y = 1$ であるから，これを $(*)$ に代入すると

$$2{\cdot}5 = 2(m^2+1)(m^4+1) \quad \text{ゆえに} \quad 5 = (m^2+1)(m^4+1)$$

$m^2+1 \geqq 5$，$m^4+1 \geqq 17$ より，上式をみたす正の整数 m はない．

(ii) $x+y = m^2+1$，$(x+y)^2+y^2 = 2(m^4+1)$ のとき

$$(m^2+1)^2 + y^2 = 2(m^4+1) \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = (m^2-1)^2$$

したがって　$y = m^2-1$　このとき　$x=2$

(iii) $x+y = 2(m^2+1)$，$(x+y)^2+y^2 = m^4+1$ のとき

$$4(m^2+1)^2 + y^2 = m^4+1 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = -3m^4 - 8m^2 - 3 < 0$$

これを満たす正の整数 y は存在しない．

(i)〜(iii) から　　$\boldsymbol{x = 2,\ \ y = m^2-1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$ より $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - f\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + f'(\pi - x) - f'(\pi + x) - f'(2\pi - x) \\ &= -\{f'(\pi + x) - f'(x)\} - \{f'(2\pi - x) - f'(\pi - x)\} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$f''(x) > 0$ であるから

$$f'(\pi + x) > f'(x), \quad f'(2\pi - x) > f'(\pi - x)$$

したがって　$f'(\pi + x) - f'(x) > 0$，$f'(2\pi - x) - f'(\pi - x) > 0$

上の 2 式と $F'(x)$ により　$F'(x) < 0$　また，$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから

$$\text{区間 } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ において} \quad F(x) \geqq 0$$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$ について，$x = \pi - t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - t)\cos(\pi - t)(-dt) \\ &= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x)\cos x\,dx \qquad \text{(A)} \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$ について，$x = \pi + t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + t)\cos(\pi + t)\,dt \\ &= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + x)\cos x\,dx \qquad \text{(B)} \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ について，$x = 2\pi - t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi - t)\cos(2\pi - t)(-dt) \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - x)\cos x\,dx \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

(A)〜(C) および $F(x)$ の定義式により

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx \\
&\qquad + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x)\cos x\,dx \\
&\qquad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + x)\cos x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

(1) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$F(x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^{2x} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

(3) $g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx &= \int_0^{2\pi} G'(x)\sin x\,dx \\
&= \Big[\,G(x)\sin x\,\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \{-G(x)\}\cos x\,dx
\end{aligned}$$

$\{-G(x)\}'' = -g'(x) > 0$ であるから，(1),(2) の結果に適用すると

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

補足 $f(x) = -G(x)$ と考えると $f''(x) = -g'(x) > 0$ である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) n 秒後，P から Q をみて時計回りの隣の頂点，対角の頂点，反時計回りの隣の頂点にある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}z_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

また，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{cases} x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ z_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \end{cases}$$

$x_{n+1} - z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n - z_n)$，$x_0 - z_0 = 0$ より　$x_n - z_n = 0$

したがって
$$(*) \begin{cases} x_0 = 0,\ y_0 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n \\ p_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n \end{cases}$$

$(*)$ の $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ に順次，$n = 0,\ 1$ を代入すると

$$x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{9},\ y_2 = \frac{1}{3},$$

よって　$p_2 = \dfrac{2}{3}x_1 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$，　$p_3 = \dfrac{2}{3}x_2 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{9} = \boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

(2) $(*)$ より

$$x_{n+1} + ky_{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right)x_n + \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{3}\right)y_n$$

とし (k は定数)，k が次式をみたすとき

$$1 : k = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} : \frac{1}{3} + \frac{k}{3} \quad \text{これを解くと} \quad k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき

$$x_{n+1} \pm \frac{y_{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}\left(x_n \pm \frac{y_n}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{複号同順})$$

したがって

$$x_n+\frac{y_n}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n,\quad x_n-\frac{y_n}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$2x_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\}$$

よって，$n\geqq 1$ のとき

$$p_n=\frac{2}{3}x_{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{3\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}}$$

(3) (2) の結果について，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$ とおくと

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{9},\quad \alpha-1=\sqrt{2}\beta,\quad \beta-1=-\sqrt{2}\alpha$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}3\sqrt{2}(p_n-p_{n+1})&=(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})-(\alpha^n-\beta^n)\\&=-\alpha^{n-1}(\alpha-1)+\beta^{n-1}(\beta-1)\\&=-\sqrt{2}\alpha\beta\alpha^{n-2}-\sqrt{2}\alpha\beta\beta^{n-2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{9}\alpha^{n-2}+\frac{\sqrt{2}}{9}\beta^{n-2}\\27(p_n-p_{n+1})&=\alpha^{n-2}\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right\}\end{aligned}$$

このとき $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ より $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$

$$27(p_n-p_{n+1})=\alpha^{n-2}\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right\}>0\quad \text{ゆえに}\quad p_n>p_{n+1}$$

$n\geqq 2$ において，$\{p_n\}$ は，単調減少列である．ただし，$p_1=0$

(i) $\left[\frac{N}{2}\right]=\frac{N}{2}$ のとき，$\left[\frac{N+1}{2}\right]=\frac{N}{2}$ より，$p_1=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} &= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} p_{2m-1} \\ &= \left(p_N+\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} p_{2m}\right)-\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} p_{2m+1} \\ &= p_N+\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1}(p_{2m}-p_{2m+1})>0\end{aligned}$$

(ii) $\left[\frac{N+1}{2}\right]=\frac{N+1}{2}$ のとき，$\left[\frac{N}{2}\right]=\frac{N-1}{2}$ より，$p_1=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} &= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} p_{2m-1} \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m}-\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} p_{2m+1} \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}(p_{2m}-p_{2m+1})>0\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，2 以上の任意の整数 N に対して，次式が成立する．

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1}<\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$