平成31年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報)　数I・II・III・A・B

1 正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする．

(1) I_1 を求めよ．必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい．

(2) $n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ．

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径1の円板を D とする．D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする．C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で2つの部分に切断したとき，小さい方を S とする．z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ．

2 空間内に $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形ABCと平面 P がある．点Aは P 上にあり，点Bと点Cは P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している．点B，Cから P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれB$'$，C$'$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}} = 0$ を示せ．

(2) $\angle \mathrm{B'AC'} > \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(3) P 上の三角形AB$'$C$'$ の辺の長さは短いものから4，$\sqrt{21}$，7であった．このとき，辺ABの長さを求めよ．

3 正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを10進数で表すと，小数第1位は0であり，第2位は0以外の数であるとする．

(1) このような n の中で最小のものを求めよ．

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに10番目にくるものを求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 正の整数 n に対して $1,\ 2, \cdots, n$ を一列に並べた順列を考える．そのような順列は $n!$ 個ある．このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2, \cdots, a_n)$ とする．この $(a_1,\ a_2, \cdots, a_n)$ に対し，各添字 $i = 1, 2, \cdots, n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \to a_j = k$ と書くことにする．ここで $a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく．例えば $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7) = (2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i) $a_1 = 2 \to a_2 = 5 \to a_5 = 4 \to a_4 = 1 \to a_1 = 2$

(ii) $a_3 = 6 \to a_6 = 3 \to a_3 = 6$

(iii) $a_7 = 7 \to a_7 = 7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する．この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ．上の (i), (ii)，(iii) は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている．

(1) $n = 3$ とする．選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ．

(2) $n = 4$ とする．長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ．

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ．

(4) n を奇数とする．選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right) d\theta$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ \log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \mathbf{\log(2+\sqrt{3})}$$

(2) $n \geqq 3$ のとき

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan\theta)'(\cos\theta)^{-n+2}\,d\theta$$
$$= \Big[\ \tan\theta(\cos\theta)^{-n+2}\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\cdot(-n+2)(\cos\theta)^{-n+1}(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$= 2^{n-2}\sqrt{3} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^{n-1}\theta}\,d\theta$$
$$= 2^{n-2}\sqrt{3} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}\,d\theta = 2^{n-2}\sqrt{3} - (n-2)(I_n - I_{n-2})$$

ゆえに　$(n-1)I_n = (n-2)I_{n-2} + 2^{n-2}\sqrt{3}$

よって　$\boldsymbol{I_n = \dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2} + \dfrac{2^{n-2}\sqrt{3}}{n-1}}$

補足 $m \geqq 3$ に対して，$J_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^m\theta\,d\theta$ とすると

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin\theta)'\cos^{m-1}\theta\,d\theta$$
$$= \Big[\ \sin\theta\cos^{m-1}\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta(m-1)\cos^{m-2}\theta(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2^m} - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2\theta - 1)\cos^{m-2}\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2^m} - (m-1)(J_m - J_{m-2})$$

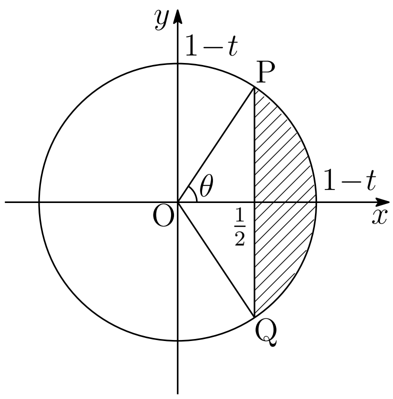
ゆえに　$mJ_m = (m-1)J_{m-2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2^m} \quad \cdots(*)$

$(*)$ は負の整数 m についても成立する．

実際，$m = -n+2$ $(n \geqq 3)$ とすると，$J_{-n} = I_n$ に注意して

$(-n+2)I_{n-2} = (-n+1)I_n + 2^{n-2}\sqrt{3}$　よって　$I_n = \dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2} + \dfrac{2^{n-2}\sqrt{3}}{n-1}$

(3) 円錐 $C : x^2 + y^2 = (z-1)^2$ と S の z 軸に垂直な平面 $z = t$ による断面は，右の図の線分 PQ および $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ で囲まれた斜線部分で，$\angle\mathrm{POQ} = 2\theta$ とすると，$\mathrm{OP} = 1-t$ より



$$(1-t)\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1-t = \frac{1}{2\cos\theta}$$

その面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}(1-t)^2(2\theta - \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2(2\theta - 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{\theta}{4\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{4\cos\theta} \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$，$1-t = \dfrac{1}{2\cos\theta}$ より

t	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
θ	$\frac{\pi}{3} \longrightarrow 0$

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}$$

よって，求める体積を V とすると，(1)，(2) の結果に注意して

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{2}} S(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \left(\frac{\theta}{4\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\theta\sin\theta}{8\cos^4\theta} - \frac{\sin^2\theta}{8\cos^3\theta}\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{\frac{\theta}{24}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}\right)' - \frac{1}{8\cos^3\theta} + \frac{1}{8\cos\theta}\right\}d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{24\cos^3\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{24}I_3 - \frac{1}{8}I_3 + \frac{1}{8}I_1 = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}I_3 + \frac{1}{8}I_1 \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}I_1 + \sqrt{3}\right) + \frac{1}{8}I_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24}I_1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{9} + \frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6}} \end{aligned}$$

補足 $C : x^2 + y^2 = (z-1)^2$ の z 軸に垂直な平面による断面は円であるから，積分は，楕円型関数，すなわち，三角関数を用いる．円錐 C の x 軸に垂直な平面を考えると，その断面は双曲線となり，双曲線関数

$$\frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) \quad \text{または} \quad \frac{a}{2}(e^t - e^{-t})$$

を用いる．特に母線と平行な断面は放物線となる[1]．C の方程式から

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

x 軸に垂直な平面による断面積を $S(x)$ とすると $\left(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1\right)$

$$S(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy = 2\int_0^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy$$

$y = \dfrac{x}{2}(e^t - e^{-t})$ とおくと

y	$0 \longrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}$
t	$0 \longrightarrow \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$\begin{aligned} S(x) &= 2\int_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{1 - \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})\right\} \cdot \frac{x}{2}(e^t + e^{-t})\,dt \\ &= x\int_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \left\{e^t + e^{-t} - \frac{x}{2}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) - x\right\} dt \\ &= x\Big[\ e^t - e^{-t} - \frac{x}{4}(e^{2t} - e^{2t}) - xt\ \Big]_0^{\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} \\ &= \sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \end{aligned}$$

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2}}^1 S(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) dx \\ &= \left[\ \frac{2}{3}x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{3}\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\ \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\pi}{9} + \frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

なお，$\displaystyle\int \sqrt{A+y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{A+y^2} + \frac{A}{2}\log(y + \sqrt{A+y^2}) + C$ を用いると

$$\begin{aligned} S(x) &= 2\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - \sqrt{x^2+y^2})\,dy \\ &= 2\Big[\ y - \frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{2}\log(y + \sqrt{x^2+y^2})\ \Big]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sqrt{1-x^2} - x^2\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2018.pdf $\boxed{5}$ 参照

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{BB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ は P 上のベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ は P に垂直なベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}=0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$

(2) P の法線ベクトルを $\vec{n}$ とし

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+\beta\vec{n},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\gamma\vec{n}$$

とおく．点 B と点 C は P に関して同じ側にあるから，$\beta\gamma>0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\beta\gamma|\vec{n}|^2=0\quad ゆえに\quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-\beta\gamma|\vec{n}|^2<0$$

よって　$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とし，$\mathrm{AB'}=\sqrt{21}$，$\mathrm{AC'}=4$ とすると

$$\mathrm{BC}=\sqrt{2}x,\quad \mathrm{BB'}=\sqrt{x^2-21},\quad \mathrm{CC'}=\sqrt{x^2-16}$$

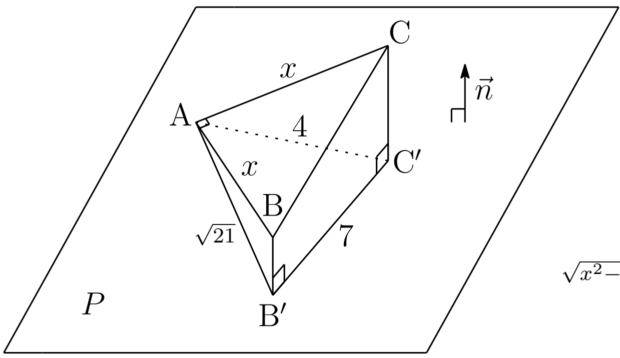
点 B から線分 $\mathrm{CC'}$ に垂線 BH を引き，$\triangle\mathrm{BCH}$ に三平方の定理を適用すると

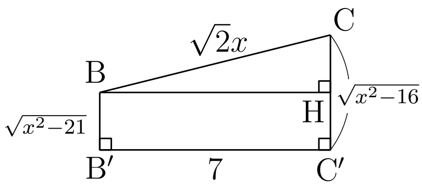
$$(\sqrt{x^2-16}-\sqrt{x^2-21})^2+7^2=(\sqrt{2}x)^2$$

整理すると　$\sqrt{x^2-16}\sqrt{x^2-21}=6$　ゆえに　$x^4-37x^2+300=0$

したがって　$(x^2-12)(x^2-25)=0$

$x>\sqrt{21}$ に注意してこれを解くと　$x=5$　よって　$\mathbf{AB=5}$





$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\sqrt{n}$ の整数部分を A，小数部分を h とすると

$$\sqrt{n} = A + h \quad \text{ゆえに} \quad n - A^2 = 2Ah + h^2$$

上の第 2 式の両辺は整数であるから，これを m とすると (m は整数)

$$m = 2Ah + h^2 \quad \text{ゆえに} \quad A^2 + m = (A + h)^2$$

h について解くと　$h = \sqrt{A^2 + m} - A = \dfrac{m}{\sqrt{A^2 + m} + A}$

条件により，$\dfrac{1}{100} \leqq h < \dfrac{1}{10}$ であるから

$$\frac{1}{100} \leqq \frac{m}{\sqrt{A^2 + m} + A} < \frac{1}{10}$$
$$10 < \frac{\sqrt{A^2 + m} + A}{m} \leqq 100 \quad \cdots (*)$$

$n = A^2 + m$ であるから，これを満たす最小の n は $m = 1$ のとき

$$10 < \sqrt{A^2 + 1} + A \leqq 100$$

n を最小にする整数 A, m は　$A = 5$，$m = 1$　　よって　$\boldsymbol{n = 26}$

(2) (i) $m = 1$ のとき，$(*)$ より

$$10 < \sqrt{A^2 + 1} + A \leqq 100 \quad \text{ゆえに} \quad 5 \leqq A < 50$$

(ii) $m = 2$ のとき，$(*)$ より

$$20 < \sqrt{A^2 + 2} + A \leqq 200 \quad \text{ゆえに} \quad 10 \leqq A < 100$$

(i)，(ii) の結果により，$n = A^2 + m$ を小さい順に 10 個並べると

$$5^2 + 1,\ 6^2 + 1,\ 7^2 + 1,\ 8^2 + 1,\ 9^2 + 1,$$
$$10^2 + 1,\ 10^2 + 2,\ 11^2 + 1,\ 11^2 + 2,\ 12^2 + 1$$

よって，求める 10 番目の数 n は　　$12^2 + 1 = \mathbf{145}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_k = k$ となる k $(k = 1, 2, 3)$ が存在する次の 4 通りである．

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 3)$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{4}{3!} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(2) 4 個の数字 1, 2, 3, 4 を円形 (サイクル) に並べる円順列の総数は次の 3! 通りある．(1 を起点とすると)

$$1 \to 2 \to 3 \to 4, \quad 1 \to 2 \to 4 \to 3, \quad 1 \to 3 \to 2 \to 4,$$
$$1 \to 3 \to 4 \to 2, \quad 1 \to 4 \to 2 \to 3, \quad 1 \to 4 \to 3 \to 2$$

よって，$n = 4$ のとき長さ 4 のサイクルは，次の 6 通りある．

$$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (2,\ 3,\ 4,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 3),\ (3,\ 4,\ 2,\ 1),}$$
$$\boldsymbol{(3,\ 1,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 1,\ 2),\ (4,\ 1,\ 2,\ 3)}$$

(3) j を正の整数とすると $\quad \dfrac{1}{j} > \displaystyle\int_j^{j+1} \frac{dx}{x}$

よって，n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \sum_{j=k}^{n} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} = \int_k^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) - \log k$$

(4) 1 から n までの n 個 (n は奇数) の順列に長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルがあれば，他のサイクルは $\dfrac{n-1}{2}$ 以下である．n 個から選んだ順列の長さ j のサイクルは，n 個から j 個取り出して並べた円順列であり，その総数は $\dfrac{{}_n\mathrm{P}_j}{j}$ 通りで，残りの $(n-j)$ 個の並べ方は $(n-j)!$ 通りである．
したがって，$\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は

$$p = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{{}_n\mathrm{P}_j}{j} \cdot (n-j)! = \frac{1}{n!} \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{n!}{j} = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j}$$

よって，(3) の結果により

$$p = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log\frac{n+1}{2} = \log 2$$