平成30年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報)　数I・II・III・A・B

$\boxed{1}$ 自然数 n に対し，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(2) $0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ．

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする．このとき(1)，(2)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

$\boxed{2}$ a を1より大きい実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ．

(2) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は2個以下であることを示せ．

(3) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は1個であるとする．このときの共有点の座標と a の値を求めよ．

$\boxed{3}$ p を素数，a，b を整数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ．

(2) $(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ．

(3) $(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 図1のように2つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える．2点 P，Q が6個の頂点 A，B，C，D，E，F を以下の規則 (a)，(b) に従って移動する．

(a) 時刻0では図2のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる．

(b) 点 P，Q は時刻が1増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

時刻 n まで2点 P，Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す．また時刻 n まで2点 P，Q が同時に同じに頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に2点 P，Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 時刻1での点 P，Q の可能な配置を，図2にならってすべて図示せよ．

(2) a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ．

(3) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ．

(4) $p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ．

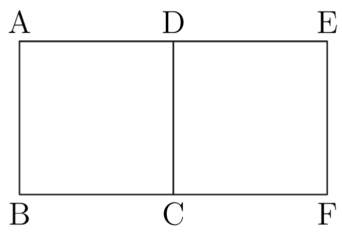


図1

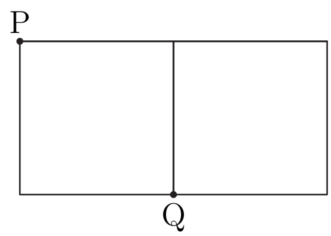


図2

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ より

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx = \left[\ \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$0 \leqq \dfrac{x^{n+1}}{x^2+1} \leqq \dfrac{x^n}{x^2+1} \leqq x^n$ より

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx$$

よって $\qquad 0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$

(3) $I_{n+2} \leqq I_n$ であるから，(1) の結果から　$2I_{n+2} \leqq I_n + I_{n+2} \leqq 2I_n$

$$2I_{n+2} \leqq \frac{1}{n+1} \leqq 2I_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{2(n+1)} \leqq nI_n \leqq \frac{n}{2(n-1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(4) (1) の結果から，自然数 k に対して，$I_{2k-1} + I_{2k+1} = \dfrac{1}{2k}$ であるから

$$(-1)^{k-1}I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

ゆえに　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \{(-1)^{k-1}I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1}\} = I_1 - I_{2n-1}$

(2) の結果より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_{2n-1} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\ \frac{1}{2}\log(x^2+1)\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点を $(p,\ q)$ とすると

$$\begin{cases} q=a^p \\ q=\log_a p \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} q=a^p \\ p=a^q \end{cases}$$

上の第 2 式から　　$q-p=a^p-a^q=a^q(a^{p-q}-1)$　$\cdots(*)$

$p-q>0$ と仮定すると，$a>1$ より $a^{p-q}-1>0$ であるから，

$(*)$ より，$q-p>0$ となり，矛盾．

また，$p-q<0$ と仮定すると，$a>1$ より $a^{p-q}-1<0$ であるから，

$(*)$ より，$q-p<0$ となり，矛盾．

したがって，$p-q=0$．よって，共有点は直線 $y=x$ 上にある．

(2) $y=e^x$ とすると　$y'=e^x$

曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y-e^t=e^t(x-t) \quad \text{ゆえに} \quad y=e^tx+(1-t)e^t$$

この接線が原点を通るとき

$$(1-t)e^t=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=1 \quad \text{接点は}\ (1,\ e)$$

したがって，原点を通る直線で曲線 $y=e^x$ に接する直線は　$y=ex$

曲線 $y=e^x$ を y 軸を元に x 軸方向に e 倍だけ拡大した曲線 $y=e^{\frac{x}{e}}$ は，直線 $y=x$ と点 $(e,\ e)$ で接する．このことから，曲線 $y=a^x$ は

- $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ のとき，直線 $y=x$ と 2 点で交わる．
- $a=e^{\frac{1}{e}}$ のとき，直線 $y=x$ と点 $(e,\ e)$ で接する．
- $e^{\frac{1}{e}}<a$ のとき，直線 $y=x$ と共有点を持たない．

(1) の結論から，2 曲線 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ の共有点は直線 $y=x$ 上にあるから，この 2 曲線の共有点は 2 個以下である．

(3) (2) の結果から，共有点は $\boldsymbol{(e,\ e)}$，$\boldsymbol{a=e^{\frac{1}{e}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 二項定理により　$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k a^{p-k} b^k$

$1 \leqq k \leqq p-1$ のとき　${}_p\mathrm{C}_k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$

素数 p は $1, 2, \cdots, p-1$ で割り切れないから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる．

よって　$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k a^{p-k} b^k \equiv 0 \pmod{p}$

(2) $(a+2)^p - a^p = 2\sum_{k=1}^{p} (a+2)^{p-k} a^{k-1}$　よって　$(a+2)^p - a^p \equiv 0 \pmod{2}$

(3) (1) の結果に $b=2$ を代入することにより

$$(a+2)^p - a^p \equiv 2^p \pmod{p}$$

(1) の結果に $a=b=1$ を代入することにより

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}$$

上の 2 式から　$(a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{p}$

したがって　$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{p}$　$\cdots$①

(2) の結果から　$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{2}$　$\cdots$②

(i) $p \neq 2$ のとき，①，② より

$$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{2p}$$

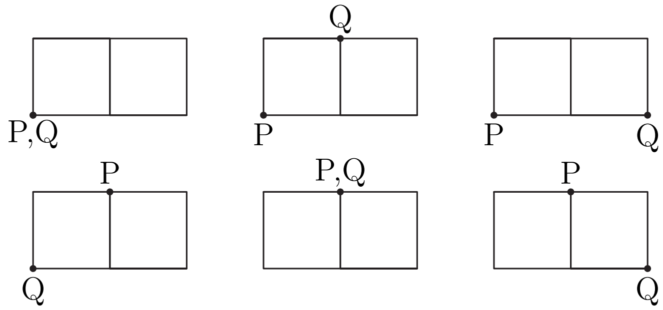
(ii) $p = 2$ のとき，$2p = 4$ であるから

$$(a+2)^p - a^p = (a+2)^2 - a^2 = 4(a+1) \equiv 0 \pmod{2p}$$

(i)，(ii) より，求める余りは

$p \neq 2$ のとき 2，　$p = 2$ のとき 0

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 時刻 1 で動点 P，Q の可能な配置は，次の 6 通り



(2) (1) の 6 通りの配置は同様に確からしい．

a_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある，すなわち，

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = (\mathrm{B}, \mathrm{D}),\ (\mathrm{D}, \mathrm{B}),\ (\mathrm{D}, \mathrm{F})$$

にある確率であるから　$a_1 = \dfrac{3}{6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

b_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上にない，すなわち，$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = (\mathrm{B}, \mathrm{F})$ にある確率であるから　$b_1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

動点 P，Q が頂点 B，D，F 上にあるのは偶数時刻で，頂点 A，C，E 上にあるのは奇数時刻である．動点 P，Q が時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において，動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある確率 a_n，動点 P，Q が A と E または B と F にある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \cdots (*)$$

したがって　$a_2 = \dfrac{1}{2}a_1 + \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{4}b_n}$

(4) $a_0 = 1$，$b_0 = 0$，$(*)$ より，$a_n \geqq 0,\ b_n \geqq 0$ であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

ゆえに　$p_0 = 1$，$p_{n+1} \leqq \dfrac{3}{4}p_n$　よって　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$