

平成30年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4

1 自然数 n に対し, 定積分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$ を考える. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ を示せ.

(2) $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ.

(4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする. このとき (1), (2) を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

2 a を 1 より大きい実数とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は, 存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ.

(2) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ.

(3) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする. このときの共有点の座標と a の値を求めよ.

3 p を素数, a, b を整数とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ.

(2) $(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ.

(3) $(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ.

4 図1のように2つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える. 2点 P, Q が6個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則 (a), (b) に従って移動する.

- (a) 時刻 0 では図2のように点 P は頂点 A に, 点 Q は頂点 C にいる.
 (b) 点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する.

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す. また時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じに頂点にいることが一度もなく, かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し, $b_n = p_n - a_n$ と定める. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を, 図2にならってすべて図示せよ.
 (2) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ.
 (3) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ.
 (4) $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ.

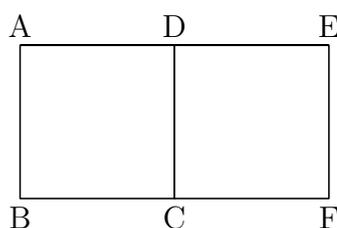


図1

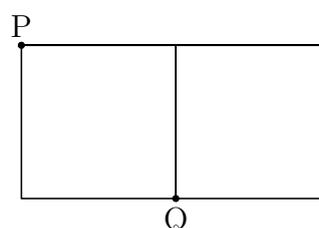


図2

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \text{ より}$$

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ において, } 0 \leq \frac{x^{n+1}}{x^2+1} \leq \frac{x^n}{x^2+1} \leq x^n \text{ より}$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$(3) \quad I_{n+2} \leq I_n \text{ であるから, (1) の結果から } 2I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2} \leq 2I_n$$

$$2I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2} \text{ であるから, はさみうちの原理により}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad (1) \text{ の結果から, 自然数 } k \text{ に対して, } I_{2k-1} + I_{2k+1} = \frac{1}{2k} \text{ であるから}$$

$$(-1)^{k-1} I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

$$\text{ゆえに} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \sum_{k=1}^n \{(-1)^{k-1} I_{2k-1} - (-1)^k I_{2k+1}\} = I_1 - I_{2n-1}$$

$$(2) \text{ の結果より, } \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n-1} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$



- 2 (1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点を (p, q) とすると

$$\begin{cases} q = a^p \\ q = \log_a p \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} q = a^p \\ p = a^q \end{cases}$$

上の第2式から $q - p = a^p - a^q = a^q(a^{p-q} - 1) \dots (*)$

$p - q > 0$ と仮定すると, $a > 1$ より $a^{p-q} - 1 > 0$ であるから,
 (*) より, $q - p > 0$ となり, 矛盾.

また, $p - q < 0$ と仮定すると, $a > 1$ より $a^{p-q} - 1 < 0$ であるから,
 (*) より, $q - p < 0$ となり, 矛盾.

したがって, $p - q = 0$. よって, 共有点は直線 $y = x$ 上にある.

- (2) $y = e^x$ とすると $y' = e^x$

曲線 $y = e^x$ 上の点 (t, e^t) における接線の方程式は

$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = e^t x + (1 - t)e^t$$

この接線が原点を通るとき

$$(1 - t)e^t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 1 \quad \text{接点は} (1, e)$$

したがって, 原点を通る直線で曲線 $y = e^x$ に接する直線は $y = ex$

曲線 $y = e^x$ を y 軸を元に x 軸方向に e 倍だけ拡大した曲線 $y = e^{\frac{x}{e}}$ は, 直線 $y = x$ と点 (e, e) で接する. このことから, 曲線 $y = a^x$ は

- $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき, 直線 $y = x$ と2点で交わる.
- $a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき, 直線 $y = x$ と点 (e, e) で接する.
- $e^{\frac{1}{e}} < a$ のとき, 直線 $y = x$ と共有点を持たない.

(1) の結論から, 2曲線 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ の共有点は直線 $y = x$ 上にあるから, この2曲線の共有点は2個以下である.

- (3) (2) の結果から, 共有点は (e, e) , $a = e^{\frac{1}{e}}$ ■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \text{二項定理により} \quad (a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p C_k a^{p-k} b^k$$

$$1 \leq k \leq p-1 \text{ のとき} \quad {}_p C_k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$$

素数 p は $1, 2, \dots, p-1$ で割り切れないから, ${}_p C_k$ は p で割り切れる.

$$\text{よって} \quad (a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p C_k a^{p-k} b^k \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(2) \quad (a+2)^p - a^p = 2 \sum_{k=1}^p (a+2)^{p-k} a^{k-1} \quad \text{よって} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\text{補足} \quad x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1}$$

(3) (1) の結果に $b=2$ を代入することにより

$$(a+2)^p - a^p \equiv 2^p \pmod{p}$$

(1) の結果に $a=b=1$ を代入することにより

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}$$

$$\text{上の2式から} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{p}$$

$$\text{したがって} \quad (a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(2) \text{の結果から} \quad (a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \pmod{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

(i) $p \neq 2$ のとき, ①, ② より

$$(a+2)^p - a^p - 2 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+2)^p - a^p \equiv 2 \pmod{2p}$$

(ii) $p=2$ のとき, $2p=4$ であるから

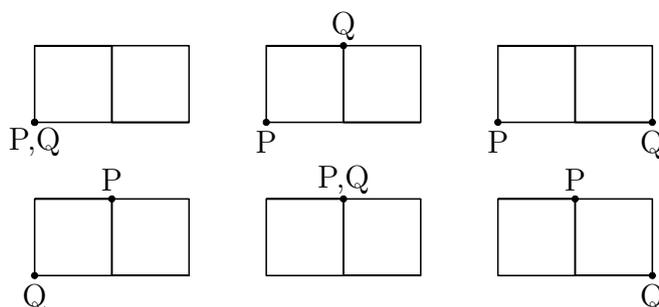
$$(a+2)^p - a^p = (a+2)^2 - a^2 = 4(a+1) \equiv 0 \pmod{2p}$$

(i), (ii) より, 求める余りは

$$p \neq 2 \text{ のとき } 2, \quad p = 2 \text{ のとき } 0$$



- 4 (1) 時刻1で動点P, Qの可能な配置は, 次の6通り



- (2) (1)の6通りの配置は同様に確からしい.

a_1 は時刻1で動点P, Qが同じ正方形上の対角にある, すなわち,

$$(P, Q) = (B, D), (D, B), (D, F)$$

にある確率であるから $a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b_1 は時刻1で動点P, Qが同じ正方形上にない, すなわち, $(P, Q) = (B, F)$

にある確率であるから $b_1 = \frac{1}{6}$

動点P, Qが頂点B, D, F上にあるのは偶数時刻で, 頂点A, C, E上にあるのは奇数時刻である. 動点P, Qが時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において, 動点P, Qが同じ正方形上の対角にある確率 a_n , 動点P, QがAとEまたはBとFにある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \dots (*)$$

$$\text{したがって} \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

$$(3) (*) \text{より} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n$$

- (4) $a_0 = 1, b_0 = 0$, (*)より, $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

$$\text{ゆえに} \quad p_0 = 1, \quad p_{n+1} \leq \frac{3}{4}p_n \quad \text{よって} \quad p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \blacksquare$$