平成 29 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

1 不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C : y = a - 1 - \log x \ (x > 0)$ を考える．s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする．このとき，次の問に答えよ．必要があれば，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を証明なしで使ってよい．

(1) 関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ．

(2) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ．

(3) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

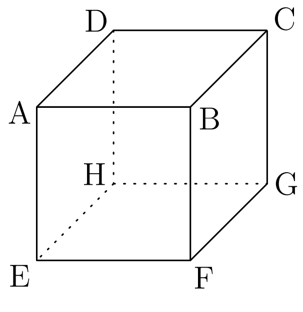
2 下図のような立方体を考える．この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する．時刻 0 では点 P は頂点 A にいる．時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ．

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ．

(4) 自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率 t_m とする．このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ．



3 xyz 空間の 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，P$(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする．また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z > 0$ を満たす部分を T とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) l 上に点 Q がある．実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a，b，t を使って表せ．

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

4 n を自然数とする．0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I)，(II)，(III) を満たしている．

(I) 集合 M は n 個の要素からなる．

(II) 集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である．

(III) 集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である．ただし，$z = w$ の場合も含める．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

(3) $n = 4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

(4) $n = 6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = a - 1 - \log x$ を微分すると　$y' = -\dfrac{1}{x}$

C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$ における接線の方程式は

$$y - (a - 1 - \log s) = -\frac{1}{s}(x - s) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{x}{s} + a - \log s$$

$y = 0$ を代入すると　$x = s(a - \log s)$　ゆえに　$\boldsymbol{u(s) = s(a - \log s)}$

$x = 0$ を代入すると　$y = a - \log s$　　ゆえに　$\boldsymbol{v(s) = a - \log s}$

(2) $u(s) = s(a - \log s)$ より　$u'(s) = a - 1 - \log s$，$u''(s) = -\dfrac{1}{s}$

s	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$u'(s)$		$+$	0	$-$
$u''(s)$		$-$	$-$	$-$
$u(s)$		↗	極大 e^{a-1}	↘

$$\lim_{s\to+0} u(s) = \lim_{s\to+0}(sa - s\log s) = 0,\quad \lim_{s\to\infty} u(s) = \lim_{s\to\infty} s(a - \log s) = -\infty$$

$v(s) = a - \log s$ より　$v'(s) = -\dfrac{1}{s}$，　$v''(s) = \dfrac{1}{s^2} > 0$

したがって，$v(s)$ は下に凸で単調減少．

$t = u(s)$，$t = v(s)$ から t を消去すると

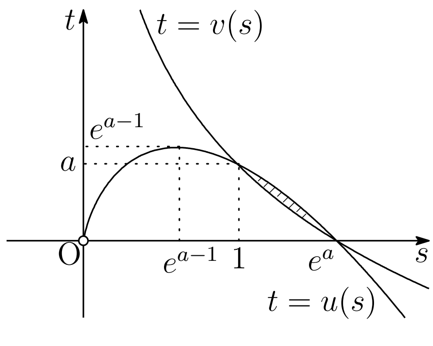
$$s(a - \log s) = a - \log s$$

ゆえに　$(s-1)(a - \log s) = 0$

これを解いて　$s = 1,\ e^a$

2 曲線 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の交点の座標は

$$(1,\ a),\ (e^a,\ 0)$$



$0 < a < 1$ より，$t = u(s)$，$t = v(s)$ のグラフは，右の図のようになる．

(3) 求める立体の体積を V とすると，(2) のグラフから

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_1^{e^a} s\{u(s)-v(s)\}\,ds = \int_1^{e^a} s(s-1)(a-\log s)\,ds \\ &= \int_1^{e^a} \left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{s}\right)'(a-\log s)\,ds \\ &= \left[\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)(a-\log s)\right]_1^{e^a} - \int_1^{e^a}\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{s}\right)ds \\ &= \frac{a}{6}+\left[\ \frac{s^3}{9}-\frac{s^2}{4}\ \right]_1^{e^a} = \frac{1}{9}e^{3a}-\frac{1}{4}e^{2a}+\frac{5}{36}+\frac{a}{6}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{18}(4e^{3a}-9e^{2a}+6a+5)}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

補足 まず，$0<x\leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す.

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0<x\leqq 1)$ とおくと

$$0<x<1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1)=2$ であるから

$$g(x)>0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

すなわち　　$0<x<1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0<x<1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}\,)=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = 1,\ q_1 = 0,\ r_1 = 0$$

$$(*)\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} = \dfrac{2}{3}p_n + r_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{3}q_n \end{cases}$$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = \mathbf{0},\quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \mathbf{\frac{2}{3}},\quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = \mathbf{0}$$

$(*)$ に $n = 2$ を代入すると，上の結果により

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \mathbf{\frac{4}{9}},\quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = \mathbf{0},\quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) $(*)$ の第 2 式から　$q_{n+2} = \dfrac{2}{3}p_{n+1} + r_{n+1}$

これに $(*)$ の第 1 式，第 3 式を代入すると

$$q_{n+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_n + \frac{1}{3}q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2} = \frac{7}{9}q_n$$

(i) n が奇数のとき $(n \geqq 1)$　$q_n = q_1\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 0$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = 0,\quad r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = 0$$

(ii) n が偶数のとき $(n \geqq 2)$　$q_n = q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i)，(ii) の結果から

n が偶数のとき　$p_n = 0$，$q_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$，$r_n = 0$

n が奇数のとき　$p_n = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}$，$q_n = 0$，$r_n = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}$ $(n \neq 1)$

(3) $s_m = \dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ であるから

$$s_1 = \frac{1}{3}p_1 = \mathbf{\frac{1}{3}},$$

$$s_m = \frac{1}{3}p_{2m-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}} = \boldsymbol{\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}} \quad \boldsymbol{(m \geqq 2)}$$

(4) 点 P が時刻 $2k$ $(1 \leqq k \leqq m-1)$ および $2m$ のときに限り点 A に戻る確率であるから，$a = \dfrac{4}{27}$，$b = \dfrac{7}{9}$ とおくと，$s_m = ab^{m-2}$ より

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{k=1}^{m-1} s_k s_{m-k} = 2s_1 s_{m-1} + \sum_{k=2}^{m-2} s_k s_{m-k} \\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot ab^{m-3} + \sum_{k=2}^{m-2} ab^{k-2}ab^{m-k-2} \\ &= \frac{2}{3}ab^{m-3} + \sum_{k=2}^{m-2} a^2b^{m-4} = \frac{2}{3}ab^{m-3} + (m-3)a^2b^{m-4} \end{aligned}$$

$t_m < s_m$ より $\quad \dfrac{2}{3}ab^{m-3} + (m-3)a^2b^{m-4} < ab^{m-2}$

$$\frac{2}{3} + (m-3)\frac{a}{b} < b \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{21}(m-3) < \frac{7}{9}$$

整理すると $\quad m < 3 + \dfrac{7}{12} \quad$ 条件 $m \geqq 2$ に注意して $\quad \boldsymbol{m = 2,\ 3}$

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (0,\ 0,\ 2) + t(a,\ b,\ -2) = (at,\ bt,\ 2-2t)$

よって $\quad \boldsymbol{\mathrm{Q}(at,\ bt,\ 2-2t)}$

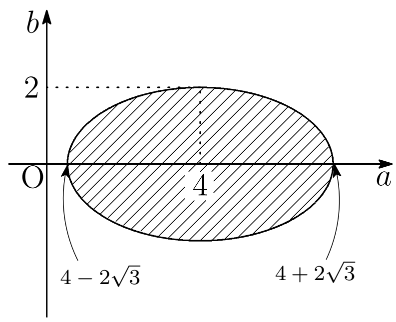
(2) S の方程式は $\quad (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$

Q が S 上にあるとき $\quad (at-2)^2 + (bt)^2 + (2-2t)^2 = 2$

$$(a^2+b^2+4)t^2 - 2(2a+4)t + 6 = 0$$

この t に関する 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつので，係数について

$$\begin{aligned} (2a+4)^2 - 6(a^2+b^2+4) &> 0 \\ a^2 - 8a + 3b^2 + 4 &< 0 \\ (a-4)^2 + 3b^2 &< 12 \end{aligned}$$

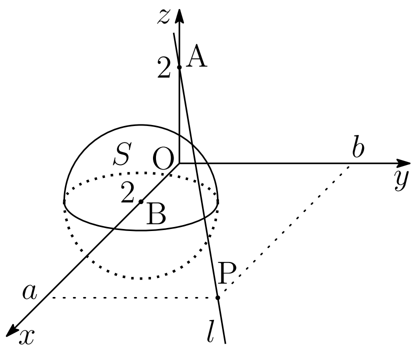


よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{(a-4)^2}{12} + \dfrac{b^2}{4} < 1}$

不等式の表す領域は，右の楕円の内部で境界線を含まない．

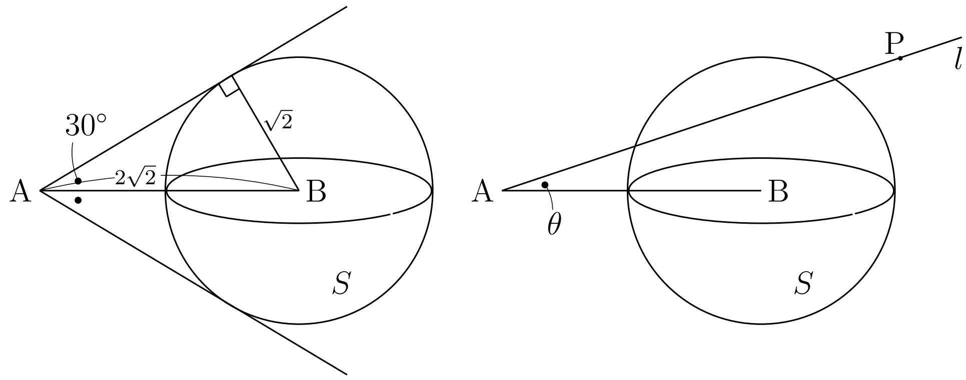
別解 S の中心を $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 0)$ とおくと

$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$$



S の半径は $\sqrt{2}$ であるから，l と S が接するとき，直線 AB と l のなす角は 30°．l と S が異なる 2 点で交わるとき，l と AB のなす角を θ とすると

$$|\cos\theta| \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots(*)$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 0, -2)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (a,\ b,\ -2)$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \frac{2a+4}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}}$$

$(*)$ より $\quad \dfrac{|a+2|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+4}} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 　ゆえに　$\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+4} \geqq \sqrt{2}|a+2|$

この両辺を平方して整理すると

$$a^2 - 8a + 3b^2 + 4 < 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(a-4)^2}{12} + \frac{b^2}{4} < 1$$

補足 A を頂点，軸 (中心軸) を AB とし，母線と軸のなす角が 30° である円錐面の内部を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AR}}|} > \cos 30^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2x-2(z-2)}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

平方して整理すると　$x^2+3y^2+z^2+4zx-8x-4z+4<0$

上式が円錐面の内部を表す領域である．

とくに，平面 $z=0$ 上における領域が　$x^2+3y^2-8x+4<0$

(3) Q の z 座標が正であるとき　$2-2t>0$　すなわち　$t<1$

2 次方程式 $(a^2+b^2+4)t^2-2(2a+4)t+6=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4},\quad \alpha\beta=\frac{6}{a^2+b^2+4}$$

$\alpha<1$，$\beta<1$ であるから，$\alpha-1<0$，$\beta-1<0$ より

$$(\alpha-1)+(\beta-1)<0,\quad (\alpha-1)(\beta-1)>0$$

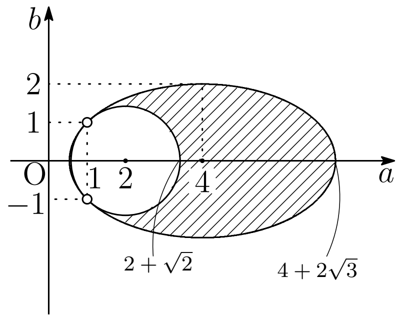
したがって　　$\alpha+\beta-2<0$，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

$$\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4}-2<0,\quad \frac{6}{a^2+b^2+4}-\frac{2(2a+4)}{a^2+b^2+4}+1>0$$

すなわち　　$(a-1)^2+b^2>1$，$(a-2)^2+b^2>2$

これと，(1) の結果により

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1} \\ \boldsymbol{(a-1)^2+b^2>1} \\ \boldsymbol{(a-2)^2+b^2>2} \end{cases}$$



不等式の表す領域は，右の図斜線部分で境界線を含まない．

別解 l と T が相異なる 2 点で交わるとき，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ は楕円 $x^2+3y^2-8x+4=0\cdots$① の内部で，円 $(x-2)^2+y^2=2\cdots$② の外部にあるから

$$a^2+3b^2-8a+4<0,\quad (a-2)^2+b^2>2$$

①，② から y を消去すると

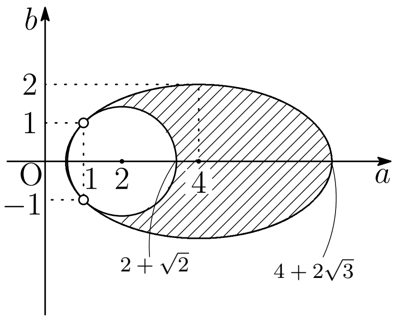
$$x^2+3\{2-(x-2)^2\}-8x+4=0 \quad ゆえに \quad (x-1)^2=0$$

$x=1$ のとき　$y=\pm1$

①，② は，点 $(1,\pm1,\ 0)$ で接する．

ゆえに，点 P の x 座標について　$a>1$

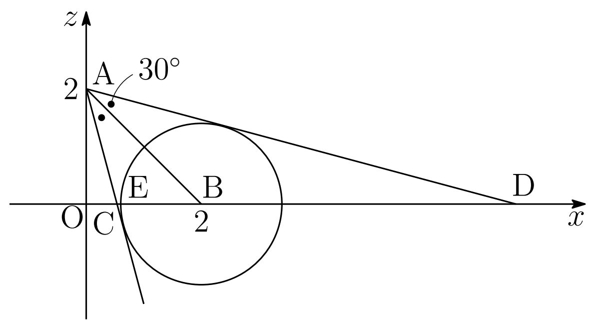
よって　$\begin{cases} \boldsymbol{a>1} \\ \boldsymbol{(a-4)^2+3b^2<12} \\ \boldsymbol{(a-2)^2+b^2>2} \end{cases}$



不等式の表す領域は，右の図斜線部分で境界線を含まない．

注意 楕円 $x^2+3y^2-8x+4=0$ の長軸上の頂点を C，D とすると，$\angle\mathrm{OAC}=15^\circ$，$\angle\mathrm{OAD}=75^\circ$ であるから

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OA}\tan15^\circ=2(2-\sqrt{3})$$
$$\mathrm{OD}=\mathrm{OA}\tan75^\circ=2(2+\sqrt{3})$$



x 軸上の 2 点 C，E の x 座標は，それぞれ $4-2\sqrt{3}$，$2-\sqrt{2}$ であり，直線 AC と直線 AE の間を l が通過するとき (不適)，第 2 式，第 3 式を満たすので，$a>1$ が必要となる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $z \in M$ のとき，$\dfrac{1}{z} \in M$ であるから，この積は　$z \cdot \dfrac{1}{z} = 1 \in M$

さらに，$1 \in M$ に対して　$-1 \in M$

(2) $M = \{z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n\}$ とすると　$M = \{-z_1, -z_2, \cdots, -z_n\}$

それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ であるから　$(-1)^n = 1$　よって　n は偶数

(3) (1) の結果から，$1 \in M$，$-1 \in M$

$z \neq \pm 1$ について $z \in M$ とすると，$\dfrac{1}{z} \in M$，$-z \in M$

$\dfrac{1}{z} \in M$ に対して　$-\dfrac{1}{z} \in M$

したがって　$M = \left\{1, -1,\ z, -z,\ \dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{z}\right\}$

$z \neq 0, \pm 1$ であるから，$z \neq -z$，$z \neq \dfrac{1}{z}$ に注意すると

$n = 4$ のとき　$z = -\dfrac{1}{z}$，　$-z = \dfrac{1}{z}$

これを解いて　$z = \pm i$　よって　$\boldsymbol{M = \{1, -1,\ i, -i\}}$

(4) (3) と同様に，$M = \left\{1, -1,\ z, -z,\ \dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{z}\right\} \cdots (*)$ とおくと

これらの要素に z を掛けて　$\{z, -z, z^2, -z^2, 1, -1\}$

(i) $z^2 = \dfrac{1}{z}$ $\left(-z^2 = -\dfrac{1}{z}\right)$ のとき

$$z^3 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

$z \neq 1$ であるから　$z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$(*)$ より　$M = \left\{1, -1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

(ii) $z^2 = -\dfrac{1}{z}$ $\left(-z^2 = \dfrac{1}{z}\right)$ のとき

$$z^3 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (z+1)(z^2-z+1) = 0$$

$z \neq -1$ であるから　$z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$(*)$ より　$M = \left\{1, -1,\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{M = \left\{1, -1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}}$$

解説 $M = \{z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n\}$，$w \in M$ とすると　$M = \{wz_1, wz_2, \cdots, wz_n\}$
それぞれの要素の積は

$$z_1 z_2 \cdots z_n = w^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$z_k \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ であるから　$w^n = 1$
M のそれぞれの要素は異なるから，$z_k \in M$ を次のようにとればよい．

$$z_k = \cos\frac{2k}{n}\pi + i\sin\frac{2k}{n}\pi \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

これに $n = 4,\ 6$ をそれぞれ代入すると，(3)，(4) の結果を得る．