平成28年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる．ただし $b > -2$ とする．このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ．

条件：$y = x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2 < t < b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 つの円 $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ と $D : (x+2)^2 + y^2 = 7^2$ を考える．また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする．このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ．

(2) (1) でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積が最大となるときの Q の座標を θ を用いて表せ．

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ．ただし (2)，(3) においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 0 であるとする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする．A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ．

(2) $k = 0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問に答えよ．ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える．

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす整数 a，b，c，d，e，f の組をすべて求めよ．

$(*)$ $\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の } 2 \text{ つの解が } c,\ d \text{ である．} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の } 2 \text{ つの解が } e,\ f \text{ である．} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の } 2 \text{ つの解が } a,\ b \text{ である．} \end{cases}$

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件 $(**)$ を満たすとする．

$(**)$ すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式

$$x^2+a_nx+b_n=0$$

の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である．

このとき

(i) 正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ．

(ii) 条件 $(**)$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2,$　　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-2)t-2b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ が，$-2<t<b$ に解をもつ条件を求めればよい．ここで

$$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\frac{b-2}{2}\right)^2-\frac{b^2+4b}{4} \quad (-2 \leqq t \leqq b)$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M=\begin{cases} f(-2) & (-2<b<2) \\ f(b) & (2 \leqq b) \end{cases}, \quad m=\begin{cases} f(b) & (-2<b<\frac{2}{3}) \\ f\left(\frac{2-b}{2}\right) & (\frac{2}{3} \leqq b \leqq 6) \\ f(-2) & (6<b) \end{cases}$$

$$f(-2)=-4b+9, \quad f(b)=2b^2-4b+1, \quad f\left(\frac{2-b}{2}\right)=-\frac{b^2+4b}{4}$$

方程式 $(*)$ が $-2<t<b$ に解をもつことから

(i) $-2<b<\dfrac{2}{3}$ のとき $\begin{cases} -4b+9>0 \\ 2b^2-4b+1<0 \end{cases}$ 　ゆえに $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2}{3}$

(ii) $\dfrac{2}{3} \leqq b<2$ のとき $\begin{cases} -4b+9>0 \\ -\dfrac{b^2+4b}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに $\dfrac{2}{3} \leqq b<2$

(iii) $2 \leqq b \leqq 6$ のとき $\begin{cases} 2b^2-4b+1>0 \\ -\dfrac{b^2+4b}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに $2 \leqq b \leqq 6$

(iv) $6<b$ のとき $\begin{cases} 2b^2-4b+1>0 \\ -4b+9<0 \end{cases}$ 　ゆえに $6<b$

(i)〜(iv) より　　$\boldsymbol{b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

別解 1 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2,$ 直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-2)t-2b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ は，実数解をもつから

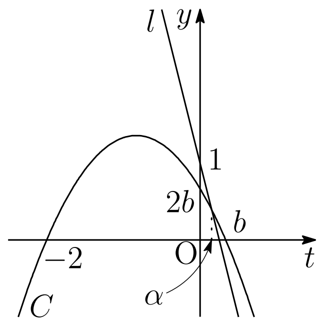
$$(b-2)^2-4\cdot1(-2b+1)\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b(b+4)\geqq 0$$

$b>-2$ に注意すると，$b\geqq 0$ の範囲について調べればよい．

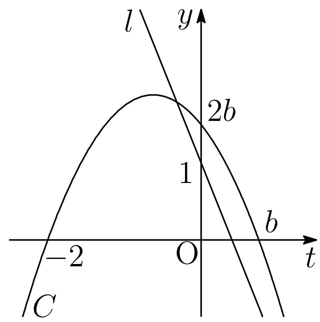
$(*)$ を変形すると　$2(b-2)t+1=-(t+2)(t-b)$

直線 $l: y=2(b-2)t+1$ と放物線 $C: y=-(t+2)(t-b)$ が $-2<t<b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい．

$0\leqq b<\frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2}\leqq b$ のとき



(i) $0\leqq b<\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ を解いて　$t=\dfrac{2-b\pm\sqrt{b^2+4b}}{2}$

$\alpha=\dfrac{2-b-\sqrt{b^2+4b}}{2}$ とおく．l の傾きは負であるから，$0<\alpha<b$ より

$$\frac{2-b-\sqrt{b^2+4b}}{2}<b \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{b^2+4b}>2-3b$$

$2-3b>0$ であるから，両辺を平方して整理すると　$2b^2-4b+1<0$

$0\leqq b<\dfrac{1}{2}$ に注意して，これを解くと　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{1}{2}$

(ii) $\dfrac{1}{2}\leqq b$ のとき，C および l が y 軸とそれぞれ $2b$，1 で交わるので，このとき，C と l は常に $-2<t<b$ に共有点をもつ．

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{b\geqq \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

別解 2 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-4}{t+2}=t-2$, 　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-2)(t+b)=-1 \quad \text{ゆえに} \quad b=-t-\frac{1}{t-2} \quad \cdots(*)$$

$-2<t<b$ より　$t<-t-\dfrac{1}{t-2}$ 　ゆえに　$\dfrac{2t^2-4t+1}{t-2}<0$

t の範囲に注意して　$-2<t<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<t<2 \quad \cdots(**)$

$f(t)=-t-\dfrac{1}{t-2}$ とおくと

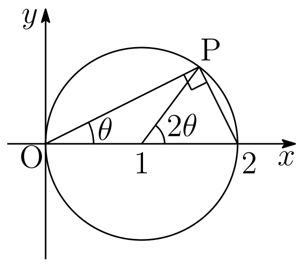
$$f'(t)=-1+\frac{1}{(t-2)^2}=-\frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2}$$

$f(t)$ は $-2<t<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ で単調減少，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<t<2$ で単調増加.

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \quad f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \quad \lim_{t\to 2-0} f(t)=\infty$$

したがって，$(**)$ において，$(*)$ を満たす b の値の範囲は　$\boldsymbol{b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathbf{OP = 2\cos\theta.}$ P$(x,\ y)$ とすると

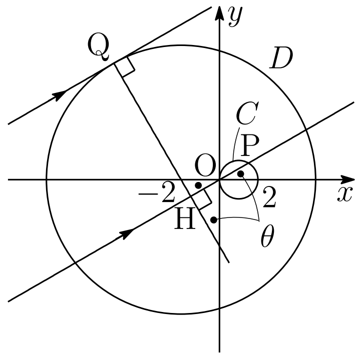


$$x = \mathrm{OP}\cos\theta = 2\cos\theta\cdot\cos\theta = 2\cos^2\theta$$
$$y = \mathrm{OP}\sin\theta = 2\cos\theta\cdot\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\mathbf{P(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1,\ 0) + (\cos 2\theta,\ \sin 2\theta) = (1+\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

(2) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (-2,\ 0) + 7\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$
$$= (-2,\ 0) + 7(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$
$$= (-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$$

よって　$\mathbf{Q(-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)}$

(3) Q から直線 OP に垂線 QH を引くと　$\mathrm{QH} = 7+2\sin\theta$

$\triangle$OPQ の面積を $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QH} = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta(7+2\sin\theta)$$
$$= \cos\theta(7+2\sin\theta) = 7\cos\theta + \sin 2\theta,$$
$$f'(\theta) = -7\sin\theta + 2\cos 2\theta = -7\sin\theta + 2(1-2\sin^2\theta)$$
$$= -(4\sin^2\theta + 7\sin\theta - 2) = -(\sin\theta+2)(4\sin\theta-1)$$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

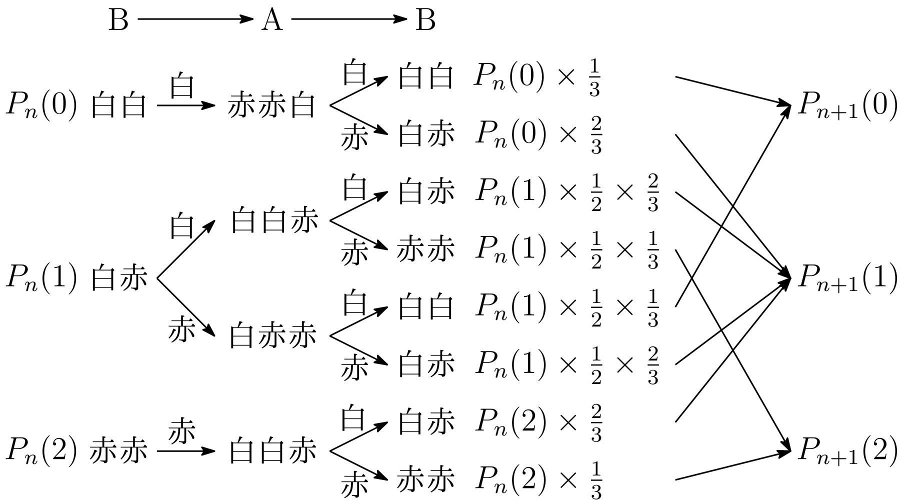
θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める最大値は

$$f(\alpha) = \cos\alpha(7+2\sin\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}\left(7+2\times\frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{15\sqrt{15}}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 定められた操作により，次の確率漸化式 $(*)$ を得る．

$$(*)\begin{cases} P_{n+1}(0)=\dfrac{1}{3}P_n(0)+\dfrac{1}{6}P_n(1) & \cdots ① \\ P_{n+1}(1)=\dfrac{2}{3}P_n(0)+\dfrac{2}{3}P_n(1)+\dfrac{2}{3}P_n(2) & \cdots ② \\ P_{n+1}(2)=\dfrac{1}{6}P_n(1)+\dfrac{1}{3}P_n(2) & \cdots ③ \end{cases}$$



$P_0(0)=1$，$P_0(1)=0$，$P_0(2)=0$ として，$(*)$ に $n=0$ を代入すると

$$\boldsymbol{P_1(0)=\frac{1}{3},\quad P_1(1)=\frac{2}{3},\quad P_1(2)=0}$$

(2) ①，③ より
$$P_{n+1}(0)+P_{n+1}(2)=\frac{1}{3}\{P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)\}$$
$$P_{n+1}(0)-P_{n+1}(2)=\frac{1}{3}\{P_n(0)-P_n(2)\}$$

したがって
$$P_n(0)+P_n(2)=\frac{1}{3}\qquad(n\geqq 1)$$
$$P_n(0)-P_n(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\quad(n\geqq 1)$$

上の 2 式から $\boldsymbol{P_n(0)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$，$\boldsymbol{P_n(2)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$

② より $P_{n+1}(1)=\dfrac{2}{3}\{P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)\}$ よって $\boldsymbol{P_n(1)=\dfrac{2}{3}}$

補足 $P_{n+1}(0)$，$P_{n+1}(1)$，$P_{n+1}(2)$ が $P_n(0)$，$P_n(1)$，$P_n(2)$ によって定まる確率過程 (1 つ前の時点だけで決定する) をマルコフ連鎖 (Markov chain) という．

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) 条件 $(*)$ に解と係数の関係を適用すると

$$\text{(A)}\begin{cases} c+d=-a \\ e+f=-c \\ a+b=-e \end{cases} \qquad \text{(B)}\begin{cases} cd=b \\ ef=d \\ ab=f \end{cases}$$

(B) の 3 式の辺々を掛けると

$$cd\cdot ef\cdot ab=b\cdot d\cdot f \quad \text{ゆえに} \quad bdf(ace-1)=0$$

i) $b=0$ のとき　(B) の第 3 式から　$f=0$　第 2 式から　$d=0$
このとき (A) は

$$\text{(A)}\begin{cases} c=-a \\ e=-c \\ a=-e \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad a=c=e=0$$

$a=b=c=d=e=f=0$ は (B) を満たす.

ii) $d=0$ または $f=0$ のとき　(i) と同様にして

$$a=b=c=d=e=f=0$$

iii) $a=c=e=1$ のとき，(A)，(B) は

$$\text{(A)}\begin{cases} 1+d=-1 \\ 1+f=-1 \\ 1+b=-1 \end{cases} \qquad \text{(B)}\begin{cases} d=b \\ f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の (A) を解いて　$b=d=f=-2$　これは (B) を満たす.

iv) $(a,\ c,\ e)=(1,-1,-1)$ のとき，(A)，(B) は

$$\text{(A)}\begin{cases} -1+d=-1 \\ -1+f=1 \\ 1+b=1 \end{cases} \qquad \text{(B)}\begin{cases} -d=b \\ -f=d \\ b=f \end{cases}$$

上の (A) を解いて　$b=d=0,\ f=2$　これは (B) を満たさない.

v) $(a,\ c,\ e)=(-1,\ 1,-1),\ (-1,-1,\ 1)$ のとき，(iv) と同様に (A) から得られる $b,\ d,\ f$ は (B) を満たさない.

i)〜v) から　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),}$
$\boldsymbol{(1,-2,\ 1,-2,\ 1,-2)}$

(2) (i) 2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} であるから，解と係数の関係により，次の漸化式が成立する．

$$①\begin{cases} a_{n+1}+b_{n+1}=-a_n \\ a_{n+1}b_{n+1}=b_n \end{cases}$$

(a) $a_k=0$ となる自然数 k が存在するとき

$$(\mathrm{C})\begin{cases} a_{k+1}+b_{k+1}=-a_k=0 \\ a_{k+2}+b_{k+2}=-a_{k+1} \\ a_{k+2}b_{k+2}=b_{k+1} \end{cases}$$

(C) から a_{k+1}，b_{k+1} を消去すると　$(a_{k+2}-1)(b_{k+2}-1)=1$

これを解いて　　$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(0,\ 0),\ (2,\ 2)$

2 次方程式 $x^2+a_{k+2}x+b_{k+2}=0$ は実数解をもつから

$${a_{k+2}}^2-4b_{k+2}\geqq 0$$

上式を満たすのは　　$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(0,\ 0)$

これを (C) の第 2 式，第 3 式に代入すると　$a_{k+1}=b_{k+1}=0$

さらに，$a_{k+1}b_{k+1}=b_k$ より　　$b_k=0$

$a_k=b_k=0$ のとき，$a_{k+1}=b_{k+1}=0$ であるから

$$a_n=b_n=0 \quad (n\geqq k)$$

また，漸化式 ① から，$a_k=b_k=0$ のとき

$$a_n=b_n=0 \quad (1\geqq n\geqq k)$$

したがって，すべての自然数 n について　$a_n=b_n=0$

よって　　$|b_1|=|b_2|=|b_3|=\cdots=0$

(b) すべての自然数について，$a_n\neq 0$ のとき，漸化式により

$$|a_{n+1}b_{n+1}|=|b_n| \quad \text{ゆえに} \quad |b_{n+1}|\leqq|b_n|$$

数列 $\{|b_n|\}$ は正の整数からなる下に有界な単調減少列であるから，

$$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$$

となる正の整数 m が存在する．

(a)，(b) より，題意は示された．

(ii) (i) の結果から

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \cdots = N$$

とおく (N は正の整数).

(a) $N = 0$ のとき

$$b_m = b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$$

漸化式 ① の第 2 式より，$b_{n+1} = 0$ のとき $b_n = 0$ である．$b_m = 0$ であるから

$$b_n = 0 \quad (1 \leqq n < m)$$

したがって，すべての自然数 n について　$b_n = 0$

$b_{n+1} = 0$ を漸化式 ① の第 1 式に代入すると　$a_{n+1} = -a_n$

数列 $\{a_n\}$ は公比 -1 の等比数列であるから，初項を a とすると

$$a_n = a(-1)^{n-1}$$

(b) $N \geqq 1$ のとき

$|b_n| = N \ (n \geqq m)$ であるから，$|a_{n+1}||b_{n+1}| = |b_n|$ より

$$|a_{n+1}|N = N \quad \text{すなわち} \quad |a_{n+1}| = 1$$

2 次方程式 $x^2 + a_n x + b_n = 0$ は実数解をもつから

$$a_n{}^2 - 4b_{n+1} = 1 - 4b_n \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b_n \leqq \frac{1}{4}$$

$|b_n| = N \geqq 1$ であるから，上式より　$b_n = -N \ (n \geqq m)$

$a_{n+1}b_{n+1} = b_n$ により

$$a_{n+1}(-N) = -N \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = 1 \ (n \geqq m)$$

$a_{n+2} + b_{n+2} = -a_{n+1}$ により

$$1 + b_{n+2} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+2} = -2$$

したがって　$a_n = 1,\ \ b_n = -2 \ \ (n \geqq m+2)$

$a_{m+2} = 1$，$b_{m+2} = -2$ であるから，漸化式 ① より

$$a_n = 1,\ \ b_n = -2 \ \ (n \leqq m+2)$$

よって，すべての自然数 n について　$a_n = 1,\ \ b_n = -2$

(a)，(b) より　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n) = (a(-1)^{n-1},\ 0),\ (1, -2)}$ **($\boldsymbol{a}$ は整数)**