# 平成 27 年度　名古屋大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
# 理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = x^{-2}\,2^x$ $(x \neq 0)$ について，$f'(x) > 0$ となるための $x$ に関する条件を求めよ．

(2) 方程式 $2^x = x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ．

(3) 方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えよ．

(1) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち，$x^4$ の係数が 1 であるものを求めよ．

(2) 8 つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で，(1) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ．

(3) (2) で求めた $f(x) = 0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $e$ を自然対数の底とし，$t$ を $t > e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち $x$ 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の $x$ 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ $(\alpha < \beta)$ とする．また，P における $C$ の接線と Q における $C$ の接線との交点を R とし，

曲線 $C$，$x$ 軸および 2 つの直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれる部分の面積を $S_1$，

曲線 $C$ および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を $S_2$

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を $\alpha$ と $\beta$ を用いて表せ．

(2) $\alpha < \dfrac{e}{t}$，$\beta < 2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 } 1 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で点 } 2 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,3,4) \text{ にあるならば，} \\ \qquad\qquad \text{確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k-1 \text{ に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } 5 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で } 4 \text{ に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す．また，石が移動した先の点に印をつけていく (点 1 には初めから印がついているものとする)．このとき，次の問に答えよ．

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 $k$ $(k=1,2,3,4,5)$ にある確率をそれぞれ求めよ．

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ．

(3) 試行を $n$ 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^{-2}\,2^x$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^{-3}\,2^x + x^{-2}\,2^x\log 2 = x^{-3}\,2^x(-2 + x\log 2) \\ &= \frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2 - 2}{x} \end{aligned}$$

$\dfrac{2^x}{x^2} > 0$ であるから，$f'(x) > 0$ となるのは

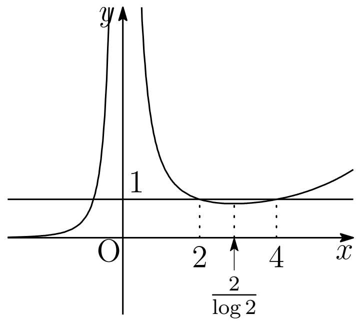
$$\frac{x\log 2 - 2}{x} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x < 0,\ \frac{2}{\log 2} < x}$$

(2) $f(x) = 1$ が異なる 3 つの実数解をもつことを示せばよい．
(1) の結果により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\dfrac{2}{\log 2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |

$2 < e < 4$ より，$\log 2 < 1 < 2\log 2$ であるから

$$2 < \frac{2}{\log 2} < 4$$




$f(2) = f(4) = 1$ であるから　$f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right) < 1$

また　$\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x) = \infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x) = \infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

補足　直接 $f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right) < 1$ を示すこともできる．

$$f\left(\frac{2}{\log 2}\right) = \left(\frac{2}{\log 2}\right)^{-2} 2^{\frac{2}{\log 2}} = \left(\frac{\log 2}{2}\right)^2 e^2 = \left(\frac{e\log 2}{2}\right)^2$$

ここで，$g(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$g'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$2 < x < e$ において $g'(x) > 0$ であるから，$g(2) < g(e)$ より

$$\frac{\log 2}{2} < \frac{\log e}{e} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{e\log 2}{2} < 1 \quad \text{よって} \quad f\left(\frac{2}{\log 2}\right) < 1$$

(3) (2) の結果から，$2^x = x^2$ が負の有理数 $-\dfrac{p}{q}$ $(p,\ q$ は正の整数で互いに素$)$ をもつと仮定すると

$$2^{-\frac{p}{q}} = \left(-\frac{p}{q}\right)^2 \quad ゆえに \quad 2^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

さらに両辺を $q$ 乗すると　$2^p = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{2q}$

上式の右辺は整数であるから　$p=1$　ゆえに　$2=q^{2q}$

これを満たす正の整数 $q$ は存在しない．

よって，(2) の結果から，求める有理数の解は　**2，4**

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}$，$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2+q^2=18, \quad pq=\sqrt{13}$$

であるから，$\alpha = pq+p+q$ より

$$(\alpha - pq)^2 = (p+q)^2 \quad ゆえに \quad \alpha^2 - 2pq\alpha + (pq)^2 = p^2+q^2+2pq$$

したがって　$\alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$

$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha+1)$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2-5)^2 = 52(\alpha+1)^2 \quad すなわち \quad \alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27}$

(2) (1) の式変形に注意すると，$f(x)=0$ は　$(x^2-5)^2 = 52(x+1)^2$

(i) $x^2-5 = 2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 18 + 2\sqrt{13} \quad ゆえに \quad (x-pq)^2 = (p+q)^2$$

したがって　$x-pq = \pm(p+q)$　すなわち　$x = pq+p+q,\ pq-p-q$

(ii) $x^2-5 = -2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 18 - 2\sqrt{13} \quad ゆえに \quad (x+pq)^2 = (p-q)^2$$

したがって　$x+pq = \pm(p-q)$　すなわち　$x = -pq+p-q, -pq-p+q$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ の解は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

(3) (2) で求めた解を

$$\alpha = pq+p+q,\quad \beta=-pq+p-q,$$
$$\gamma = pq-p-q,\quad \delta=-pq-p+q$$

とおく．ここで $p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}>\sqrt{9+2\sqrt{16}}=\sqrt{17}$,

$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}<\sqrt{9-2\sqrt{16}}=1$

したがって

$$\begin{aligned}
\alpha-\beta &= 2pq+2q = 2q(p+1)>0\\
\beta-\gamma &= 2p-2pq = 2p(1-q)>0\\
\gamma-\delta &= 2pq-2q = 2q(p-1)>0
\end{aligned}$$

上の 3 式から，$\alpha>\beta>\gamma>\delta$ となる．よって，大きい順に

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},\\
&\boldsymbol{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

**解説** 4 次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0\cdots(*)$ が

$$(x^2-5)^2=52(x+1)^2$$

と変形できることを利用して (フェラーリの方法)，解を求めている．

本題 (1) はこの変形につながる設問となっている．

手がかりになしに，方程式 $(*)$ を解くとすると

$$x^4-62x^2-104x-27=(x^2+k)^2-(px+q)^2$$

とおき ($k,\ p,\ q$ は定数)，上式の右辺を展開して整理すると

$$x^4-62x^2-104x-27=x^4+(2k-p^2)x^2-2pqx+k^2-q^2$$

同じ次数の項の係数を比較すると　$p^2 = 2k + 62$，$pq = 52$，$q^2 = k^2 + 27$

これらの 3 式から，$p$，$q$ を消去すると　$(2k + 62)(k^2 + 27) = 52^2$

整理すると　　$k^3 + 31k^2 + 27k - 515 = 0 \quad \cdots (**)$

因数定理により　　$(k + 5)(k^2 + 26k - 103) = 0$

$k = -5$ とすると，$p = q = \pm 2\sqrt{13}$ となり，$(*)$ の解が求まる．

余談だが，3 次方程式 $(**)$ を一般的な方法 (カルダノの方法) で解いてみる．

$k = t - \dfrac{31}{3} \cdots$ ① とおいて，$(**)$ に代入すると

$$\left(t - \frac{31}{3}\right)^3 + 31\left(t - \frac{31}{3}\right)^2 + 27\left(t - \frac{31}{3}\right) - 515 = 0$$

整理すると　　$t^3 - \dfrac{880}{3}t + \dfrac{38144}{27} = 0$

$t = u + v$ とおいて，これに代入すると

$$\begin{aligned}(u+v)^3 - \frac{880}{3}(u+v) + \frac{38144}{27} &= 0 \\ 3(u+v)\left(uv - \frac{880}{9}\right) + u^3 + v^3 + \frac{38144}{27} &= 0\end{aligned}$$

$uv = \dfrac{880}{9}$，$u^3 + v^3 = -\dfrac{38144}{27}$ とし，$u^3$，$v^3$ を解とする 2 次方程式

$$X^2 + \frac{38144}{27}X + \left(\frac{880}{9}\right)^3 = 0$$

これを解くと　$X = \dfrac{64}{27}(-298 \pm 39\sqrt{51}i) = \left\{\dfrac{4}{3}(2 \mp \sqrt{51}i)\right\}^3$　(複号同順)

$z = \dfrac{4}{3}(2 + \sqrt{51}i)$，$w = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ とおくと，$uv$ は実数であるから

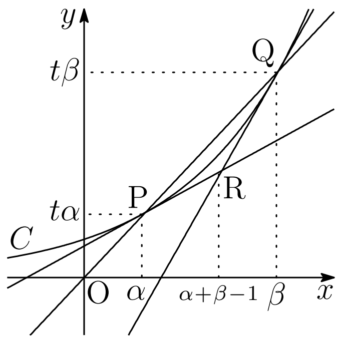
$$\begin{aligned} t &= z + \overline{z}, \quad zw + \overline{z}\,\overline{w}, \quad z\overline{w} + \overline{z}w \\ &= \frac{16}{3}, \ -\frac{8}{3} - 4\sqrt{17}, \ -\frac{8}{3} + 4\sqrt{17}\end{aligned}$$

① より　　$k = -5, \ -13 - 4\sqrt{17}, \ -13 + 4\sqrt{17}$

一般に，4 次方程式 $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ は，$x = y - \dfrac{a_3}{4}$ おくことにより，$y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$ と変形でき，フェラーリの方法が適用できる．フェラーリの方法の中で，3 次方程式を解く必要があり，3 次方程式の一般的な解法がカルダノの方法である．さらにカルダノの方法の中で 2 次方程式の解の公式を用いている．

**3** (1) $y=e^x$ を微分すると　$y'=e^x$

$C$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ e^\alpha)$ および $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta)$ における接線の方程式は，それぞれ




$$\begin{cases} y-e^\alpha=e^\alpha(x-\alpha) \\ y-e^\beta=e^\beta(x-\beta) \end{cases}$$

$e^\alpha=t\alpha$，$e^\beta=t\beta$ であるから，上の 2 式は

$$\begin{cases} y=t\alpha(x+1-\alpha) \\ y=t\beta(x+1-\beta) \end{cases}$$ これを解いて　$\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$

$$S_1=\int_\alpha^\beta e^x\,dx=\Big[\ e^x\ \Big]_\alpha^\beta=e^\beta-e^\alpha=t\beta-t\alpha=t(\beta-\alpha)$$

3 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ t\alpha)$，$\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ t\beta)$ から $x$ 軸にそれぞれ垂線 $\mathrm{PP'}$，$\mathrm{RR'}$，$\mathrm{QQ'}$ を引くと，$\mathrm{P'R'}=\beta-1$，$\mathrm{R'Q'}=1-\alpha$ より

$$\begin{aligned} S_2&=S_1-(\text{台形 PP'R'R の面積})-(\text{台形 RR'Q'Q の面積}) \\ &=t(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(\beta-1)(t\alpha+t\alpha\beta)-\frac{1}{2}(1-\alpha)(t\alpha\beta+t\beta) \\ &=t(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}t\alpha(\beta-1)(\beta+1)-\frac{1}{2}t\beta(1-\alpha)(1+\alpha) \\ &=t(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}t\alpha(\beta^2-1)-\frac{1}{2}t\beta(1-\alpha^2) \\ &=t(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}t(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}t\alpha\beta(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}t(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{1}{2}(1-\alpha\beta)}$

(2) $C$ 上の点 P における接線の傾きは　$e^{\alpha}$

これと直線 PQ の傾き $t$ との大小関係により　$e^{\alpha} < t$

このとき，$e^{\alpha} = t\alpha$ であるから　$t\alpha < t$

$t > 0$ であるから　$\alpha < 1$　ゆえに　$t\alpha = e^{\alpha} < e$　よって　$\alpha < \dfrac{e}{t}$

また，$e^{\beta} > \beta^2$ $(\beta > 0)$ であるから　$t\beta = e^{\beta} > \beta^2$ より　$t > \beta$

ゆえに　$t^2 > t\beta = e^{\beta}$　したがって　$\log t^2 > \beta$　よって　$\beta < 2\log t$

$0 < \alpha < \dfrac{e}{t}$，$0 < \beta < 2\log t$ より　　$0 < \alpha\beta < 2e\cdot\dfrac{\log t}{t}$　$\cdots$①

ここで，$t = e^u$ とおくと　$0 < \dfrac{\log t}{t} = \dfrac{u}{e^u} < \dfrac{u}{u^2} = \dfrac{1}{u}$

$t \longrightarrow \infty$ のとき，$u \longrightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t} = 0$$

① より　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\alpha\beta = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(1-\alpha\beta) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

**補足** $C : y = e^x$ 上の点 $(1,\ e)$ における接線の方程式は　$y = ex$

$$e^x > x^2 \quad \cdots(*)$$

(i) $0 < x < 1$ のとき，$e^x > 1 > x^2$　よって，$(*)$ は成立する．

(ii) $x = 1$ のとき，明らかに $(*)$ は成立する．

(iii) $x > 1$ のとき，$e^x - ex > 0$ であるから ($y = e^x$ と $y = ex$ のグラフ)

$$\begin{aligned}\int_1^x (e^t - et)\,dt &= \left[\ e^t - \frac{e}{2}t^2\ \right]_1^x = e^x - e - \frac{e}{2}(x^2-1)\\ &= e^x - \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{2} > 0\end{aligned}$$

したがって　　$e^x > \dfrac{e}{2}x^2 + \dfrac{e}{2} > x^2$　よって，$(*)$ は成立する．

(i)〜(iii) から，$x > 0$ のとき，$(*)$ は成立する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $n$ 回繰り返した後に，石が点 $k$ にある確率を $P_n(k)$ とする $(k=1,2,3,4,5)$.

$n$ が奇数のとき　$P_n(1)=P_n(3)=P_n(5)=0$

$n$ が偶数のとき　$P_n(2)=P_n(4)=0$

$n$ が奇数のとき，石は点 2 または 4 にある．このとき

$$P_{2j+1}(2)=p_{2j-1}(2)\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+P_{2j-1}(4)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$P_{2j+1}(4)=P_{2j-1}(2)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+P_{2j-1}(4)\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，$j$ を自然数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1(2)=1,\ P_1(4)=0$$
$$(*)\begin{cases} P_{2j+1}(2)=\dfrac{3}{4}P_{2j-1}(2)+\dfrac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4)=\dfrac{1}{4}P_{2j-1}(2)+\dfrac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

$(*)$ に $j=1$ を代入すると

$$P_3(2)=\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 0=\frac{3}{4},\quad P_3(4)=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot 0=\frac{1}{4}$$

さらに，$(*)$ に $j=2$ を代入すると

$$P_5(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8},\quad P_5(4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1)=P_5(2)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{5}{16}}$$
$$P_6(3)=P_5(2)\times\frac{1}{2}+P_5(4)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P_6(5)=P_5(4)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{16}}$$
$$P_6(2)=P_6(4)=\mathbf{0}$$

別解 $(*)$ より，自然数 $j$ について

$$\begin{aligned} P_{2j+1}(2)+P_{2j+1}(4) &= P_{2j-1}(2)+P_{2j-1}(4) \\ &= 1+0=1, \\ P_{2j+1}(2)-P_{2j+1}(4) &= \frac{1}{2}\left(P_{2j-1}(2)-P_{2j-1}(4)\right) \\ &= \frac{1}{2^j}(P_1(2)-P_1(4))=\frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

$P_{2j-1}(2)+P_{2j-1}(4)=1$ および $P_{2j-1}(2)-P_{2j-1}(4)=\dfrac{1}{2^{j-1}}$ から

$$P_{2j-1}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^j},\quad P_{2j-1}(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^j}$$

したがって
$$\begin{aligned} P_{2j}(1) &= \frac{1}{2}P_{2j-1}(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{j+1}}, \\ P_{2j}(3) &= \frac{1}{2}P_{2j-1}(2)+\frac{1}{2}P_{2j-1}(4)=\frac{1}{2}, \\ P_{2j}(5) &= \frac{1}{2}P_{2j-1}(4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{j+1}} \end{aligned}$$

上式に，$j=3$ を代入すると　$P_6(1)=\boldsymbol{\dfrac{5}{16}}$，$P_6(3)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$P_6(5)=\boldsymbol{\dfrac{3}{16}}$

また　$P_6(2)=P_6(4)=\mathbf{0}$

補足 $n$ が奇数のとき，$P_n(1)=P_n(3)=P_n(5)=0$

$$P_n(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}},\quad P_n(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

$n$ が偶数のとき，$P_n(2)=P_n(4)=0$

$$P_n(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}},\quad P_n(3)=\frac{1}{2},\quad P_n(5)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}$$

(2) 4 回繰り返した後に，点 5，点 3 にある確率は

$$\begin{aligned} P_4(5) &= P_3(4)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \\ P_4(3) &= P_3(2)\times\frac{1}{2}+P_3(4)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5)+P_4(3)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 試行により，石が点 1，点 2，点 3 のいずれかを移動するとき，奇数回目の試行の後に石は，点 2 にある．$2j-1$ 回目の試行の後に石が点 2 にある確率を $x_{2j-1}$ とすると

$$x_{2j+1} = x_{2j-1} \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$x_1 = 1, \quad x_{2j+1} = \frac{3}{4}x_{2j-1}$$

これを解いて　$x_{2j-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} \quad (j \geqq 1)$

このとき，$2j$ 回目の試行の後に石が点 1 または点 3 にある確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1}$

試行により，石が点 1，点 2 のいずれかを移動するとき，奇数回目の試行の後に石は，点 2 にある．$2j-1$ 回目の試行の後に石が点 2 にある確率を $y_{2j-1}$ とすると

$$y_{2j+1} = y_{2j-1} \times \frac{1}{2}\cdot 1$$

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$y_1 = 1, \quad y_{2j+1} = \frac{1}{2}y_{2j-1}$$

これを解いて　$y_{2j-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \quad (j \geqq 1)$

このとき，$2j$ 回目の試行の後に石が点 1 にある確率は　$y_{2j-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$

以上の結果から

(i) $n = 2j-1$ のとき，求める確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

(ii) $n = 2j$ のとき，求める確率は　$\left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$

(i)，(ii) から　**$\boldsymbol{n}$ が奇数のとき**　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$

**$\boldsymbol{n}$ が偶数のとき**　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$