平成 26 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B・C

1 空間内にある半径 1 の球 (内部を含む) を B とする．直線 ℓ と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である．

(1) B の中心と ℓ との距離を求めよ．

(2) ℓ のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

2 実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

3 xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \cdots$ を次のように定める．

- C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する．
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある．

円 C_n の半径を r_n とする．

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ．

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を一組与えよ．

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ．

4 負でない整数 N が与えられたとき，$a_1 = N$，$a_{n+1} = \left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ として数列 $\{a_n\}$ を定める．ただし $[a]$ は，実数 a の整数部分 ($k \leqq a < k+1$ となる整数 k) を表す．

(1) $a_3 = 1$ となるような N をすべて求めよ．

(2) $0 \leqq N < 2^{10}$ をみたす整数 N のうちで，N から定まる数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 となるようなものはいくつあるか．

(3) 0 から $2^{100} - 1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列 $\{a_n\}$ を定める．次の条件 $(*)$ をみたす最小の正の整数 m を求めよ．

$(*)$ 数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる．

解答例

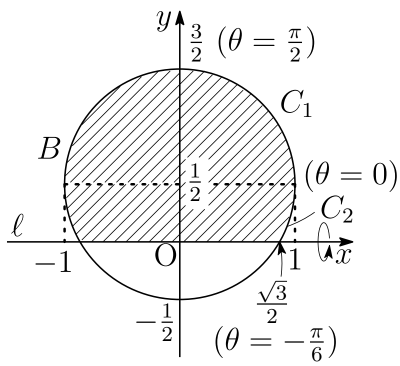
1 (1) ℓ と B の中心の距離は

$$\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) 右の図の半径 1 の円 C の点 $(x,\ y)$ を

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta+\frac{1}{2}$$

とする．$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq 0$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とすると，求める回転体の体積 V は



$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=\int_{C_1}y^2\,dx-\int_{C_2}y^2\,dx=\int_0^1 y^2\,dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 y^2\,dx\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta\end{aligned}$$

このとき

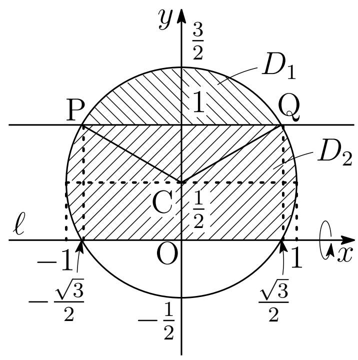
$$\begin{aligned}y^2\,dx=y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta&=\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2(\cos\theta)'d\theta\\&=-\frac{1}{4}(4\sin^3\theta+4\sin^2\theta+\sin\theta)\,d\theta\\&=\frac{1}{4}(\sin 3\theta+2\cos 2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(\sin 3\theta+2\cos 2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\\&=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\sin 2\theta+4\cos\theta-2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

よって　　$V=\boldsymbol{\pi\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$

別解 右図の D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，$\angle\mathrm{PCQ} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = \pi\cdot 1^2 - 2S_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y = \dfrac{1}{2} + \sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)\cdots(*)$ とすると

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(y-1)\,dx = S_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．$(*)$ より，$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(y^2 - 1^2)\,dx \\ &= \pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(y-1)\,dx + \pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4} - x^2\right)dx \\ &= \pi S_1 + \pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)dx \\ &= \pi\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\pi}{6}(\sqrt{3})^3 = \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す2曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq |x| \leqq 1\right) \\ 1 & \left(|x| \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sqrt{1-x^2} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq |x| \leqq 1\right) \\ 0 & \left(|x| \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 1, \quad \int_{-1}^{1}\{f(x) - g(x)\}\,dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-1}^{1} \{f(x)^2 - g(x)^2\}\,dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}\,dx = \pi S_2 = \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

よって，求める立体の体積を V とすると

$$V = V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\pi\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)}$$

補足 D_2 の重心は $(0,\ \frac{1}{2})$ であるから，パップス・ギュルダンの定理[1] により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot \frac{1}{2} = \pi S_2 = \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線は

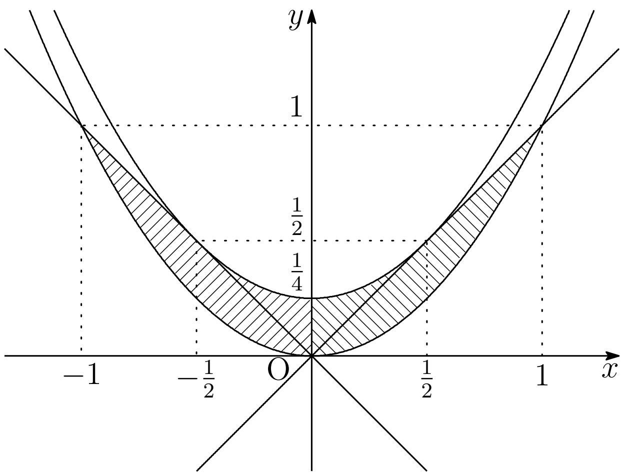
$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=(2t+1)x-t^2-t \quad \cdots ①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dt}=0$ であるから

$$\frac{dy}{dt}=2x-2t-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=t+\frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② から t を消去すると　　$y=x^2+\dfrac{1}{4}$　$\cdots(*)$

$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，線分 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ が通過してできる図形は，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．

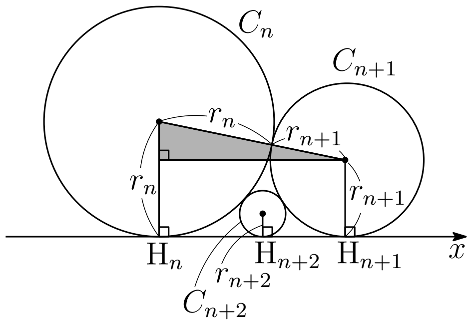


求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_0^1 (x-x^2)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-x\right\}dx \\
&= \int_0^1 x(1-x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{6}+\left[\ \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{5}{24}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{5}{12}}$　■

3 (1) C_n の x 軸との接点を H_n とする．



三平方の定理により

$$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1} = \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$$

同様に　$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$，　$\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2} = 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}}$

$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2} + \mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}$ であるから

$$2\sqrt{r_n r_{n+1}} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}} + 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}}$$

よって　$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} + \frac{1}{\sqrt{r_n}}$$

(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおくと，(1) の結果から

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$\alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -1$ とおくと　$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) = \alpha^{n-1}(1 - \beta) = \alpha^n$$
$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) = \beta^{n-1}(1 - \alpha) = \beta^n$$

$\alpha \neq \beta$ であるから　$a_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$，　$s = \dfrac{1}{\alpha - \beta}$，　$t = -\dfrac{1}{\alpha - \beta}$

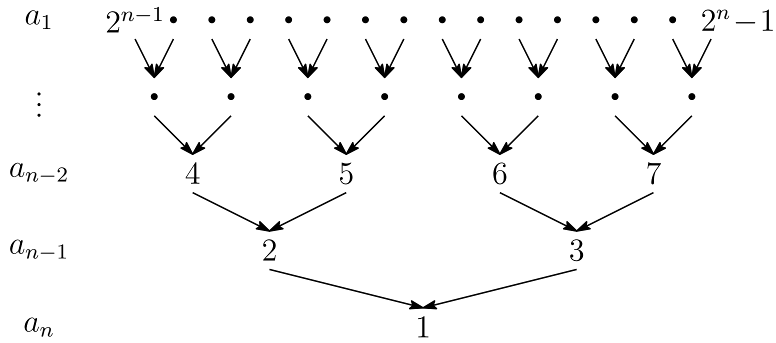
α，β は 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから，$\alpha > \beta$ とすると

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

(3) (2) の結果から　$r_n = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{\alpha^n - \beta^n}\right)^2$　ゆえに　$\dfrac{r_n}{\beta^{2n}} = \dfrac{5}{(1 - \beta^{2n})^2}$

よって　$k = \beta^2 = \boldsymbol{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}}$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{k^n} = \mathbf{5}$　■

$\boxed{4}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ の推移は次のようになる．



$a_3=1$ となるのは，上の推移に $n=3$ を代入した行にある数であるから

$$\mathbf{4,\ 5,\ 6,\ 7}$$

(2) $\{a_n\}$ の推移により，2 から $2^{10}-1$ までの $2^{10}-2$ 個の $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$(2^{10}-2)\times\frac{1}{2}=2^9-1=\mathbf{511}\ (\text{個})$$

(3) $2^{k-1} \leqq N \leqq 2^k-1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ ある項が N になる確率は

$$\frac{1}{(2^k-1)-2^{k-1}+1}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

ここで，$\dfrac{1}{2^7}<\dfrac{1}{100}<\dfrac{1}{2^6}$ であるから

$$k-1=7 \quad \text{すなわち} \quad k=8$$

のとき，N となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる．

このとき，$2^7 \leqq N \leqq 2^8-1$ であるから，求める最小の m は

$$2^7=\mathbf{128}$$

■