平成25年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報)　数I・II・III・A・B・C

1 a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y = x^3 - a^2x$ とする．

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3 - a^2t)$ における C の接線を ℓ とする．ℓ と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t は 0 でないとする．

(2) b を実数とする．C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ．

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を ℓ_1，ℓ_2 とする．ただし，ℓ_1 と ℓ_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする．ℓ_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ．

2 $f_0(x) = xe^x$ として，正の整数 n に対して，

$$f_n(x) = \int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt + f'_{n-1}(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める．

(1) $f_1(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} (at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ．ただし，実数 a，b，c は定数とする．

(3) 正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ．

3 n を 2 以上の整数とする．1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある．ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする．この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す．この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする．次の問に答えよ．ただし，j と k は正の整数で，$j + k \leqq n$ を満たすとする．また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする．

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ．

(2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ．

(3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする．$P(s)$ を求めよ．

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ m，p を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする．

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ．

(2) $(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ．

(3) $(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ．

(4) r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする．2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=x^3-a^2x$ より　$y'=3x^2-a^2$

C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-(t^3-a^2t)=(3t^2-a^2)(x-t)\quad すなわち\quad y=(3t^2-a^2)x-2t^3$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^3-a^2x=(3t^2-a^2)x-2t^3\quad ゆえに\quad (x+2t)(x-t)^2=0$$

これを解いて　$x=t,-2t$　よって，求める面積 $S(t)$ は [1]

$$S(t)=\left|\int_{-2t}^{t}(x+2t)(x-t)^2\,dx\right|=\left|\frac{1}{12}\{t-(-2t)\}^4\right|=\boldsymbol{\frac{27}{4}t^4}$$

(2) ℓ が $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るとき

$$b=(3t^2-a^2)\cdot 2a-2t^3\quad ゆえに\quad b=-2t^3+6at^2-2a^3$$

C の接線の本数とその接点の個数は一致する．

$f(t)=-2t^3+6at^2-2a^3$ とおくと

$$f'(t)=-6t^2+12at=-6t(t-2a)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$	$6a^3$	$\searrow$

$b=f(t)$ の実数解の個数であるから

$\boldsymbol{b<-2a^3}$**のとき**	**1 本**
$\boldsymbol{b=-2a^3}$**のとき**	**2 本**
$\boldsymbol{-2a^3<b<6a^3}$**のとき**	**3 本**
$\boldsymbol{b=6a^3}$**のとき**	**2 本**
$\boldsymbol{6a^3<b}$ **のとき**	**1 本**

(3) (2) の結果から，接線が 2 本で，原点を通らない，すなわち，$b=f(t)$ の解が $t\neq 0$ であるのは，$b=6a^3$ であるから

$$6a^3=-2t^3+6at^2-2a^3\quad ゆえに\quad (t-2a)^2(t+a)=0$$

(1) の結果から　$S(2a)=\dfrac{27}{4}(2a)^4,\ \ S(-a)=\dfrac{27}{4}(-a)^4$

条件より，$S_1=S(2a),\ \ S_2=S(-a)$ であるから

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{(2a)^4}{(-a)^4}=\boldsymbol{16}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

解説

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおいて，$x=t$ を極としてテイラー展開[2] すると

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+a(x-t)^3$$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=f(t)+f'(t)(x-t)$$

C の変曲点を $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とすると，$f''(p)=6ap+2b=0$ であるから

$$f''(t)=6at+2b=6a(t-p)$$

上式に注意して，C と ℓ の方程式を連立すると

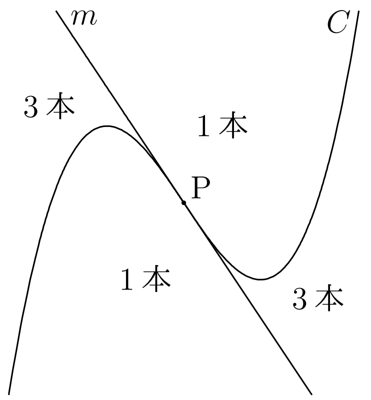
$$3a(t-p)(x-t)^2+a(x-t)^3=0 \quad ゆえに \quad a(x-t)^2(x+2t-3p)=0$$

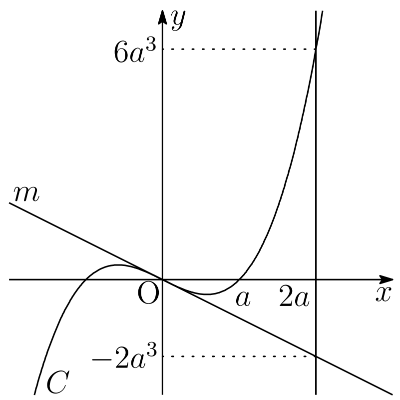
したがって，C と ℓ の A 以外の共有点 A' の x 座標は　$x=3p-2t$
よって，C と ℓ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{|a|}{12}\{t-(3p-2t)\}^4=\frac{27}{4}|a|(t-p)^4$$

C の変曲点 P における接線を m とすると，座標平面上の点から曲線 C に引ける接線の本数は，C と m を境界とする領域によって左下の図のようになる．なお，境界線 C と m 上の点からは 2 本，ただし変曲点からは 1 本である．

本題の点 B は直線 $x=2a$ の点であるから，(2) は右下の図から求めることができる．また，(3) の条件を満たす点 B は C 上の点であることも明らか．





[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2001.pdf の p.7 を参照．

2 (1) 与えられた条件式に $n=1$ を代入すると

$$f_1(x)=\int_{-x}^{x} f_0(t)\,dt+f_0'(x)=\int_{-x}^{x} te^t\,dt+(xe^x)'$$
$$=\Big[\,(t-1)e^t\,\Big]_{-x}^{x}+(x+1)e^x=\mathbf{2xe^x+(x+1)e^{-x}}$$

(2) $g(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$ より

$$g(-x)=\int_{x}^{-x}(at+b)e^t\,dt=-\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt=-g(x)$$

$g(x)$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)\,dx=\mathbf{0}$

(3) 与えられた条件式に $n=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}f_2(x)&=\int_{-x}^{x} f_1(t)\,dt+f_1'(x)\\&=\int_{-x}^{x}\{2te^t+(t+1)e^{-t}\}\,dt+\{2xe^x+(x+1)e^{-x}\}'\\&=\Big[\,(2t-2)e^t-(t+2)e^{-t}\,\Big]_{-x}^{x}+(2x+2)e^x-xe^{-x}=3xe^x+2e^x\end{aligned}$$

同様に，$g_0(x)=e^x$ とおいて，正の整数 n に対して

$$g_n(x)=\int_{-x}^{x} g_{n-1}(t)\,dt+g_{n-1}'(x)$$

により，x の関数 $g_n(x)$ を定めると

$$\begin{aligned}g_1(x)&=\int_{-x}^{x} e^t\,dt+(e^x)'=\Big[\,e^t\,\Big]_{-x}^{x}+e^x=2e^x-e^{-x},\\g_2(x)&=\int_{-x}^{x}(2e^t-e^{-t})\,dt+(2e^x-e^{-x})'\\&=\Big[\,2e^t+e^{-t}\,\Big]_{-x}^{x}+2e^x+e^{-x}=3e^x\end{aligned}$$

したがって　$\begin{pmatrix} f_2(x)\\ g_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} xe^x\\ e^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0(x)\\ g_0(x)\end{pmatrix}$

$f_{2n}(x)$，$g_{2n}(x)$ の線形性により

$$\begin{pmatrix} f_{2n}(x)\\ g_{2n}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} f_0(x)\\ g_0(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n&2n\cdot3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} xe^x\\ e^x\end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{f_{2n}(x)=3^{n-1}(3x+2n)e^x}$

補足 $A=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$F=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とおくと

$$A=3E+2F,\quad E^2=E,\quad F^2=O\quad (O\text{ は零行列})$$

したがって $\quad A^n=(3E+2F)^n=(3E)^n+n(3E)^{n-1}{\cdot}2F$

$$=3^nE+2n{\cdot}3^{n-1}F=\begin{pmatrix}3^n&2n{\cdot}3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}$$

別解 $f_0(x)=xe^x$，$g_0(x)=e^x$ より

$$f_2(x)=3xe^x+2e^x=3f_0(x)+2g_0(x),$$
$$g_2(x)=3e^x=3g_0(x)$$

$f_{2n}(x)=a_nf_0(x)+b_ng_0(x)$ とおくと $(n=0,1,2,\cdots)$，$a_0=1$，$b_0=0$

$$\begin{aligned}f_{2n+2}(x)&=a_nf_2(x)+b_ng_2(x)\\&=a_n\{3f_0(x)+2g_0(x)\}+b_n{\cdot}3g_0(x)\\&=3a_nf_0(x)+(2a_n+3b_n)g_0(x)\end{aligned}$$

$f_{2n+2}(x)=a_{n+1}f_0(x)+b_{n+1}g_0(x)$ であるから

$$a_{n+1}=3a_n$$
$$b_{n+1}=2a_n+3b_n$$

$a_n=a_0{\cdot}3^n=1{\cdot}3^n=3^n$ であるから

$$b_{n+1}=2{\cdot}3^n+3b_n\quad\text{ゆえに}\quad\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+\frac{2}{3}$$
$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{b_0}{3^0}+\frac{2}{3}n\quad\text{すなわち}\quad b_n=2n{\cdot}3^{n-1}$$

よって $\quad f_{2n}(x)=3^nf_0(x)+2n{\cdot}3^{n-1}g_0(x)$

$$=3^nxe^x+2n{\cdot}3^{n-1}e^x$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 3回とも j から $j+k$ までのカードが出る確率であるから

$$\left(\frac{j+k-j+1}{n}\right)^3=\boldsymbol{\frac{(k+1)^3}{n^3}}$$

(2) (i) 出た目が i $(j<i<j+k)$，j，$j+k$ となる場合の総数は

$$\{(j+k-1)-(j+1)+1\}\cdot 3!=6(k-1)\ (\text{通り})$$

(ii) 出た目が j，j，$j+k$ となる場合の総数は　3 (通り)

(iii) 出た目が j，$j+k$，$j+k$ となる場合の総数は　3 (通り)

(i)〜(iii) から，$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる場合の総数は

$$6(k-1)+3+3=6k \quad \cdots(*)$$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{6k}{n^3}}$

別解 $A(j,i):X\geqq j$ かつ $Y\leqq i$ とすると　$P(A(j,i))=\dfrac{(i-j+1)^3}{n^3}$

したがって，求める確率は

$$P(A(j,j+k))-P(A(j+1,j+k)\cup A(j,j+k-1)) \quad \cdots(**)$$

ここで　$P(A(j+1,j+k)\cup A(j,j+k-1))$

$$\begin{aligned}&=P(A(j+1,j+k))+P(A(j,j+k-1))-P(A(j+1,j+k-1))\\&=\frac{k^3}{n^3}+\frac{k^3}{n^3}-\frac{(k-1)^3}{n^3}\end{aligned}$$

$(**)$ より，求める確率は　$\dfrac{(k+1)^3}{n^3}-\left\{\dfrac{k^3}{n^3}+\dfrac{k^3}{n^3}-\dfrac{(k-1)^3}{n^3}\right\}=\dfrac{6k}{n^3}$

(3) $Y-X=s$ となるは，$X=j,\ Y=j+s$ $(j=1,2,\cdots,\ n-s)$

したがって，$(*)$ により

$$P(s)=\frac{6s}{n^3}\times(n-s)=\boldsymbol{\frac{6s(n-s)}{n^3}}$$

(4) (3) の結果から　$P(s)=-\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2n}$

n は偶数であるから，求める s は　$\boldsymbol{s=\dfrac{n}{2}}$ ■

4 (1) $(x-1)^{101}$ の x^2 の項は　${}_{101}\mathrm{C}_2 x^2(-1)^{99} = -5050x^2$

よって，求める係数は　$\mathbf{-5050}$

(2) $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ および m が奇数であるから

$$(p-1)^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 = 0 \pmod{p}$$

よって，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる．

(3) m は 3 以上の奇数であることに注意して

$$\begin{aligned}(p-1)^m+1 &= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k p^{m-k}(-1)^k + 1\\ &= \sum_{k=0}^{m-2} {}_m\mathrm{C}_k p^{m-k}(-1)^k + {}_m\mathrm{C}_{m-1}p(-1)^{m-1} + (-1)^m + 1\\ &= p^2\sum_{k=0}^{m-2} {}_m\mathrm{C}_k p^{m-2-k}(-1)^k + mp\end{aligned}$$

m は p で割り切れないから，mp は p^2 で割り切れない．
よって，$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れない．

(4) まず，自然数 r について

$$2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r} \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す．

(i) $r=1$ のとき，明らか．

(ii) $r=k$ のとき

$$2^{3^{k-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^k}$$

が成立すると仮定する，このとき，$N = 2^{3^{k-1}}+1$ とおくと

$$\begin{aligned}2^{3^k}+1 &= (2^{3^{k-1}})^3 + 1 = (N-1)^3 + 1\\ &= N(N^2-3N+3)\end{aligned}$$

N は 3^k で割り切れ，N^2-3N+3 は 3 で割り切れるから

$$2^{3^k}+1 \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$$

したがって，すべての自然数 r について，$(*)$ は成立する．

$(*)$ より　　$2^{3^{r-1}} \equiv -1 \pmod{3^r}$

この両辺を m 乗すると

$$(2^{3^{r-1}})^m \equiv (-1)^m \quad \text{ゆえに} \quad 2^{3^{r-1}m} \equiv -1 \pmod{3^r}$$

したがって　　$2^{3^{r-1}m} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$

よって，$s = 3^{r-1}m$ とすると，$2^s + 1$ は 3^r で割り切れる，

補足 2 は 3^r と互いに素であるから，フェルマー・オイラーの定理[3]により

$$2^{\varphi(3^r)} \equiv 1 \pmod{3^r}$$

このとき，$\varphi(3^r) = 3^r\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = 2{\cdot}3^{r-1}$ であるから

$$2^{2\cdot3^{r-1}} - 1 = (2^{3^{r-1}} + 1)(2^{3^{r-1}} - 1) \equiv 0 \pmod{3^r}$$

ここで　　$2^{3^{r-1}} - 1 \equiv (-1)^{3^{r-1}} - 1 \equiv -2 \pmod{3}$

よって　　$2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$　■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6 を参照)