

平成24年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

1 a を正の定数とし, xy 平面上の曲線 C の方程式を $y = x^3 - a^2x$ とする.

- (1) C 上の点 $A(t, t^3 - a^2t)$ における C の接線を l とする. l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ. ただし, t は 0 でないとする.
- (2) b を実数とする. C の接線のうち xy 平面上の点 $B(2a, b)$ を通るものの本数を求めよ.
- (3) C の接線のうち点 $B(2a, b)$ を通るものが2本の場合を考え, それらの接線を l_1, l_2 とする. ただし, l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0, 0)$ を通らないとする. l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし, l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする. $S_1 \geq S_2$ として, $\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ.

2 $f_0(x) = xe^x$ として, 正の整数 n に対して,

$$f_n(x) = \int_{-x}^x f_{n-1}(t) dt + f'_{n-1}(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める.

- (1) $f_1(x)$ を求めよ.
 - (2) $g(x) = \int_{-x}^x (at+b)e^t dt$ とするとき, 定積分 $\int_{-c}^c g(x) dx$ を求めよ. ただし, 実数 a, b, c は定数とする.
 - (3) 正の整数 n に対して, $f_{2n}(x)$ を求めよ.
- 3 n を2以上の整数とする. 1から n までの整数が1つずつ書かれている n 枚のカードがある. ただし, 異なるカードには異なる整数が書かれているものとする. この n 枚のカードから, 1枚のカードを無作為に取り出して, 書かれた整数を調べてからもとに戻す. この試行を3回繰り返し, 取り出したカードに書かれた整数の最小値を X , 最大値を Y とする. 次の問に答えよ. ただし, j と k は正の整数で, $j+k \leq n$ を満たすとする. また, s は $n-1$ 以下の正の整数とする.

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j+k$ となる確率を求めよ.
- (2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ.
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする. $P(s)$ を求めよ.
- (4) n が偶数のとき, $P(s)$ を最大にする s を求めよ.

4 m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする.

- (1) $(x - 1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ.
- (2) $(p - 1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ.
- (3) $(p - 1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないことを示せ.
- (4) r を正の整数とし, $s = 3^{r-1}m$ とする. $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad y = x^3 - a^2x \text{ より } y' = 3x^2 - a^2$$

C 上の点 $A(t, t^3 - a^2t)$ における接線 l の方程式は

$$y - (t^3 - a^2t) = (3t^2 - a^2)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3$$

C と l の方程式から y を消去すると

$$x^3 - a^2x = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 2t)(x - t)^2 = 0$$

これを解いて $x = t, -2t$ よって、求める面積 $S(t)$ は¹

$$S(t) = \left| \int_{-2t}^t (x + 2t)(x - t)^2 dx \right| = \left| \frac{1}{12} \{t - (-2t)\}^4 \right| = \frac{27}{4} t^4$$

(2) l が $B(2a, b)$ を通るとき

$$b = (3t^2 - a^2) \cdot 2a - 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad b = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3$$

C の接線の本数とその接点の個数は一致する.

$f(t) = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3$ とおくと

$$f'(t) = -6t^2 + 12at = -6t(t - 2a)$$

t	...	0	...	$2a$...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	$-2a^3$	↗	$6a^3$	↘

$b = f(t)$ の実数解の個数であるから

$$b < -2a^3 \text{ のとき} \quad 1 \text{ 本}$$

$$b = -2a^3 \text{ のとき} \quad 2 \text{ 本}$$

$$-2a^3 < b < 6a^3 \text{ のとき} \quad 3 \text{ 本}$$

$$b = 6a^3 \text{ のとき} \quad 2 \text{ 本}$$

$$6a^3 < b \text{ のとき} \quad 1 \text{ 本}$$

(3) (2) の結果から、接線が 2 本で、原点を通らない、すなわち、 $b = f(t)$ の解が $t \neq 0$ であるのは、 $b = 6a^3$ であるから

$$6a^3 = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3 \quad \text{ゆえに} \quad (t - 2a)^2(t + a) = 0$$

$$(1) \text{ の結果から } S(2a) = \frac{27}{4}(2a)^4, \quad S(-a) = \frac{27}{4}(-a)^4$$

条件より、 $S_1 = S(2a)$, $S_2 = S(-a)$ であるから

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(2a)^4}{(-a)^4} = 16$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

解説

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において, $x = t$ を極としてテイラー展開²すると

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + a(x - t)^3$$

曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $A(t, f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f(t) + f'(t)(x - t)$$

C の変曲点を $P(p, f(p))$ とすると, $f''(p) = 6ap + 2b = 0$ であるから

$$f''(t) = 6at + 2b = 6a(t - p)$$

上式に注意して, C と ℓ の方程式を連立すると

$$3a(t - p)(x - t)^2 + a(x - t)^3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(x - t)^2(x + 2t - 3p) = 0$$

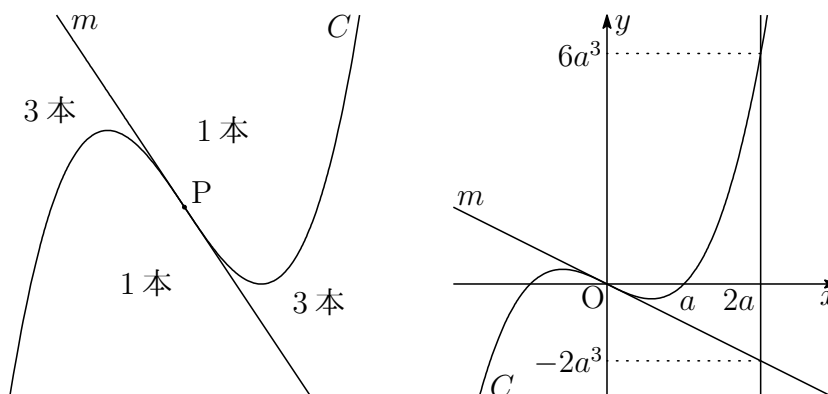
したがって, C と ℓ の A 以外の共有点 A' の x 座標は $x = 3p - 2t$

よって, C と ℓ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{|a|}{12} \{t - (3p - 2t)\}^4 = \frac{27}{4} |a| (t - p)^4$$

C の変曲点 P における接線を m とすると, 座標平面上の点から曲線 C に引ける接線の本数は, C と m を境界とする領域によって左下の図のようになる. なお, 境界線 C と m 上の点からは2本, ただし変曲点からは1本である.

本題の点 B は直線 $x = 2a$ の点であるから, (2) は右下の図から求めることができる. また, (3) の条件を満たす点 B は C 上の点であることも明らか.



²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri.2001.pdf の p.7 を参照.

2 (1) 与えられた条件式に $n = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-x}^x f_0(t) dt + f_0'(x) = \int_{-x}^x te^t dt + (xe^x)' \\ &= \left[(t-1)e^t \right]_{-x}^x + (x+1)e^x = \mathbf{2xe^x + (x+1)e^{-x}} \end{aligned}$$

(2) $g(x) = \int_{-x}^x (at+b)e^t dt$ より

$$g(-x) = \int_x^{-x} (at+b)e^t dt = - \int_{-x}^x (at+b)e^t dt = -g(x)$$

$g(x)$ は奇関数であるから $\int_{-c}^c g(x) dx = \mathbf{0}$

(3) 与えられた条件式に $n = 2$ を代入すると

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_{-x}^x f_1(t) dt + f_1'(x) \\ &= \int_{-x}^x \{2te^t + (t+1)e^{-t}\} dt + \{2xe^x + (x+1)e^{-x}\}' \\ &= \left[(2t-2)e^t - (t+2)e^{-t} \right]_{-x}^x + (2x+2)e^x - xe^{-x} = \mathbf{3xe^x + 2e^x} \end{aligned}$$

同様に, $g_0(x) = e^x$ とおいて, 正の整数 n に対して

$$g_n(x) = \int_{-x}^x g_{n-1}(t) dt + g_{n-1}'(x)$$

により, x の関数 $g_n(x)$ を定めると

$$g_1(x) = \int_{-x}^x e^t dt + (e^x)' = \left[e^t \right]_{-x}^x + e^x = 2e^x - e^{-x},$$

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \int_{-x}^x (2e^t - e^{-t}) dt + (2e^x - e^{-x})' \\ &= \left[2e^t + e^{-t} \right]_{-x}^x + 2e^x + e^{-x} = \mathbf{3e^x} \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{pmatrix} f_2(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(x) \\ g_0(x) \end{pmatrix}$$

$f_{2n}(x)$, $g_{2n}(x)$ の線形性により

$$\begin{pmatrix} f_{2n}(x) \\ g_{2n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} f_0(x) \\ g_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

よって $\mathbf{f_{2n}(x) = 3^{n-1}(3x + 2n)e^x}$

補足 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A = 3E + 2F, \quad E^2 = E, \quad F^2 = O \quad (O \text{ は零行列})$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } A^n &= (3E + 2F)^n = (3E)^n + n(3E)^{n-1} \cdot 2F \\ &= 3^n E + 2n \cdot 3^{n-1} F = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

別解 $f_0(x) = xe^x$, $g_0(x) = e^x$ より

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 3xe^x + 2e^x = 3f_0(x) + 2g_0(x), \\ g_2(x) &= 3e^x = 3g_0(x) \end{aligned}$$

$f_{2n}(x) = a_n f_0(x) + b_n g_0(x)$ とおくと ($n = 0, 1, 2, \dots$), $a_0 = 1$, $b_0 = 0$

$$\begin{aligned} f_{2n+2}(x) &= a_n f_2(x) + b_n g_2(x) \\ &= a_n \{3f_0(x) + 2g_0(x)\} + b_n \cdot 3g_0(x) \\ &= 3a_n f_0(x) + (2a_n + 3b_n)g_0(x) \end{aligned}$$

$f_{2n+2}(x) = a_{n+1} f_0(x) + b_{n+1} g_0(x)$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 3b_n \end{aligned}$$

$a_n = a_0 \cdot 3^n = 1 \cdot 3^n = 3^n$ であるから

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2 \cdot 3^n + 3b_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{b_n}{3^n} + \frac{2}{3} \\ \frac{b_n}{3^n} &= \frac{b_0}{3^0} + \frac{2}{3}n \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2n \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f_{2n}(x) &= 3^n f_0(x) + 2n \cdot 3^{n-1} g_0(x) \\ &= 3^n x e^x + 2n \cdot 3^{n-1} e^x \end{aligned}$$



3 (1) 3回とも j から $j+k$ までのカードが出る確率であるから

$$\left(\frac{j+k-j+1}{n}\right)^3 = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2) (i) 出た目が i ($j < i < j+k$), j , $j+k$ となる場合の総数は

$$\{(j+k-1) - (j+1) + 1\} \cdot 3! = 6(k-1) \text{ (通り)}$$

(ii) 出た目が j , j , $j+k$ となる場合の総数は 3 (通り)

(iii) 出た目が j , $j+k$, $j+k$ となる場合の総数は 3 (通り)

(i)~(iii) から, $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる場合の総数は

$$6(k-1) + 3 + 3 = 6k \quad \dots (*)$$

よって, 求める確率は $\frac{6k}{n^3}$

別解 $A(j, i) : X \geq j$ かつ $Y \leq i$ とすると $P(A(j, i)) = \frac{(i-j+1)^3}{n^3}$

したがって, 求める確率は

$$P(A(j, j+k)) - P(A(j+1, j+k) \cup A(j, j+k-1)) \quad \dots (**)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad & P(A(j+1, j+k) \cup A(j, j+k-1)) \\ &= P(A(j+1, j+k)) + P(A(j, j+k-1)) - P(A(j+1, j+k-1)) \\ &= \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \end{aligned}$$

$$(**) \text{ より, 求める確率は } \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{6k}{n^3}$$

(3) $Y - X = s$ となるは, $X = j$, $Y = j+s$ ($j = 1, 2, \dots, n-s$)

したがって, (*) により

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = \frac{6s(n-s)}{n^3}$$

(4) (3) の結果から $P(s) = -\frac{6}{n^3} \left(s - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{2n}$

n は偶数であるから, 求める s は $s = \frac{n}{2}$ ■

4 (1) $(x-1)^{101}$ の x^2 の項は ${}_{101}C_2 x^2 (-1)^{99} = -5050x^2$

よって、求める係数は **-5050**

(2) $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ および m が奇数であるから

$$(p-1)^m + 1 \equiv (-1)^m + 1 = 0 \pmod{p}$$

よって、 $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れる。

(3) m は 3 以上の奇数であることに注意して

$$\begin{aligned} (p-1)^m + 1 &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k p^{m-k} (-1)^k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} {}_m C_k p^{m-k} (-1)^k + {}_m C_{m-1} p (-1)^{m-1} + (-1)^m + 1 \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{m-2} {}_m C_k p^{m-2-k} (-1)^k + mp \end{aligned}$$

m は p で割り切れないから、 mp は p^2 で割り切れない。

よって、 $(p-1)^m + 1$ は p^2 で割り切れない。

(4) まず、自然数 r について

$$2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r} \quad \dots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す。

(i) $r=1$ のとき、明らか。

(ii) $r=k$ のとき

$$2^{3^{k-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^k}$$

が成立すると仮定する、このとき、 $N = 2^{3^{k-1}} + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} 2^{3^k} + 1 &= (2^{3^{k-1}})^3 + 1 = (N-1)^3 + 1 \\ &= N(N^2 - 3N + 3) \end{aligned}$$

N は 3^k で割り切れ、 $N^2 - 3N + 3$ は 3 で割り切れるから

$$2^{3^k} + 1 \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$$

したがって、すべての自然数 r について、(*) は成立する。

(*) より $2^{3^{r-1}} \equiv -1 \pmod{3^r}$

この両辺を m 乗すると

$$(2^{3^{r-1}})^m \equiv (-1)^m \quad \text{ゆえに} \quad 2^{3^{r-1}m} \equiv -1 \pmod{3^r}$$

したがって $2^{3^{r-1}m} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$

よって、 $s = 3^{r-1}m$ とすると、 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れる、

補足 2 は 3^r と互いに素であるから、フェルマー・オイラーの定理³により

$$2^{\varphi(3^r)} \equiv 1 \pmod{3^r}$$

このとき、 $\varphi(3^r) = 3^r \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 3^{r-1}$ であるから

$$2^{2 \cdot 3^{r-1}} - 1 = (2^{3^{r-1}} + 1)(2^{3^{r-1}} - 1) \equiv 0 \pmod{3^r}$$

ここで $2^{3^{r-1}} - 1 \equiv (-1)^{3^{r-1}} - 1 \equiv -2 \pmod{3}$

よって $2^{3^{r-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^r}$ ■

³ http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (p.6 を参照)