平成23年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B・C

1 $-\dfrac{1}{4} < s < \dfrac{1}{3}$ とする．xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s = \{(x,\ y,\ 0) \mid 1 \leqq x \leqq 2+4s,\ 1 \leqq y \leqq 2-3s\}$$

がある．長方形 R_s を x 軸のまわりに1回転してできる立体を K_s とする．

(1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ．

(2) s を (1) で求めた値とする．このときの立体 K_s を y 軸のまわりに1回転してできる立体 L の体積を求めよ．

2 $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．整数 $n \geqq 1$ に対して，次の試行により行列 A_{n-1} から行列 A_n を定める．

「数字の組 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$ を1つずつ書いた4枚の札が入っている袋から1枚を取り出し，その札に書かれている数字の組が $(i,\ j)$ のとき，A_{n-1} の $(i,\ j)$ 成分に1を加えた行列を A_n とする．」

この試行を n 回 $(n=2,3,4,\cdots)$ くり返した後に，A_0, A_1, $\cdots$, A_{n-1} が逆行列をもたず A_n は逆行列をもつ確率を p_n とする．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) $(n-1)$ 回 $(n=2,3,4,\cdots)$ の試行をくり返した後に，A_{n-1} の第1行の成分がいずれも正で第2行の成分はいずれも0である確率 q_{n-1} を求めよ．

(3) p_n $(n=2,3,4,\cdots)$ を求めよ．

3 xy 平面上に3点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある．

(1) $a>0$ とする．$\mathrm{OP}:\mathrm{AP} = 1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(2) $a>0$，$b>0$ とする．$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP} = 1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

4 a，b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の2次方程式

$$x^2+ax+b=0, \quad y^2+by+a=0$$

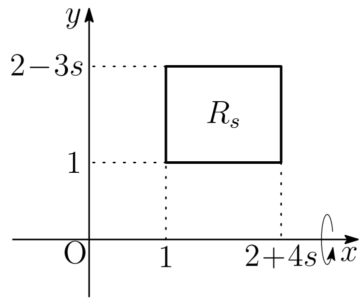
がそれぞれ整数解をもつとする．

(1) $a=b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ．

(2) $a>b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $V(s)$ は底面の半径が $2-3s$，高さが $1+4s$ の円柱の体積から底面の半径が 1，高さが $1+4s$ の円柱の体積を引いたものであるから



$$\begin{aligned}V(s) &= \pi(2-3s)^2(1+4s) - \pi\cdot 1^2(1+4s)\\ &= 3\pi(4s+1)(3s-1)(s-1)\\ &= 3\pi(12s^3-13s^2+1)\end{aligned}$$

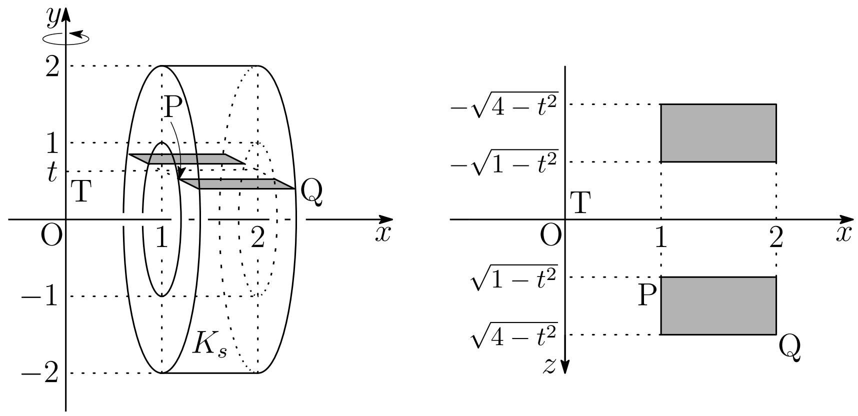
$V(s)$ を微分すると　$V'(s) = 3\pi(36s^2-26s) = 6\pi s(18s-13)$

s	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$	0	$\nearrow$	3π	$\searrow$	0

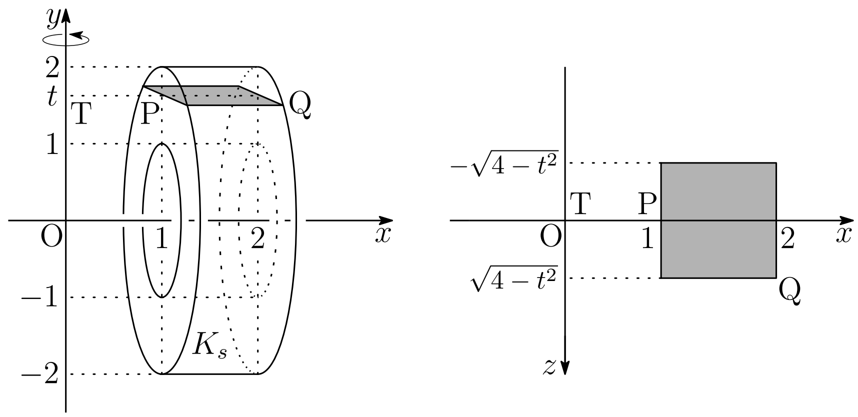
よって　$\boldsymbol{s=0}$ **のとき 最大値** $\boldsymbol{3\pi}$

(2) 立体 K_s の平面 $y=t$ による断面で，y 軸上の y 座標が t である点 T からの距離が最短，最長である点の 1 つをそれぞれ P，Q とする．

(i) $|t|<1$ のとき　$\mathrm{TQ}^2 - \mathrm{TP}^2 = \{2^2+(4-t^2)\} - \{1^2+(1-t^2)\} = 6$



(ii) $1 \leqq |t| \leqq 2$ のとき　$\mathrm{TQ}^2 - \mathrm{TP}^2 = \{2^2+(4-t^2)\} - 1^2 = 7-t^2$



(i),(ii) から $|t| \leqq 2$ のとき，$f(t) = \mathrm{TQ}^2 - \mathrm{TP}^2$ とおくと

$$f(t) = \begin{cases} 6 & (|t| < 1) \\ 7 - t^2 & (1 \leqq |t| \leqq 2) \end{cases}$$

求める立体 L の体積を V とすると，$f(t)$ が偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 6\,dt + \int_1^2 (7 - t^2)\,dt \\ &= \Big[\, 6t \,\Big]_0^1 + \Big[\, 7t - \frac{t^3}{3} \,\Big]_1^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{64}{3}\pi}$ ■

2 (1) A_0, A_1 が逆行列をもたず A_2 が逆行列をもつとき，A_1, A_2 の推移は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の 4 通りであるから　$p_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 4 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

A_0, A_1, A_2 が逆行列をもたず A_3 が逆行列をもつとき，A_1, A_2, A_3 の推移は

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，A_2, A_3 の推移は次の 5 通りである．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A_1 が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のときも同様に，A_2, A_3 の推移はそれぞれ 5 通りである．

よって　　$p_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 5 \times 4 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$

(2) $n-1$ 回の試行後に $(n=2,3,4\cdots)$，第 2 行の成分がいずれも 0 である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$n-1$ 回の試行後に $(n=2,3,4,\cdots)$，(1, 1) 成分が $n-1$，(1, 2) 成分が $n-1$ となる確率はともに

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4^{n-1}}$$

よって $\quad q_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^{n-1}}\times 2=\boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2}{4^{n-1}}}$

(3) (2) と同様に次の (a)〜(c) の事象の確率もそれぞれ q_{n-1} である $(n=2,3,4,\cdots)$.

(a) A_{n-1} の第 2 行の成分がいずれも正で第 1 行の成分が 0

(b) A_{n-1} の第 1 列の成分がいずれも正で第 2 列の成分が 0

(c) A_{n-1} の第 2 列の成分がいずれも正で第 1 列の成分が 0

(2) および (a)〜(c) のとき，A_n が逆行列をもつ確率は

$$q_{n-1}\times\frac{1}{2}\times 4=2q_{n-1}\quad\cdots①$$

A_{n-1} の 1 つの成分だけが正で A_n が逆行列をもつ確率は $(n=2,3,4,\cdots)$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{1}{4}\times 4=\frac{1}{4^{n-1}}\quad\cdots②$$

①，② から

$$\begin{aligned}p_n&=2q_{n-1}+\frac{1}{4^{n-1}}\\&=2\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2}{4^{n-1}}\right)+\frac{1}{4^{n-1}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{3}{4^{n-1}}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{3}$ (1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{AP}^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 1 : a$ より，$\mathrm{AP}^2 = a^2\mathrm{OP}^2$ であるから

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

整理すると　$(1-a^2)x^2 + (1-a^2)y^2 - 2x + 1 = 0$

よって　$a = 1$ のとき　**直線** $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$

$a \neq 1$ のとき　**円** $\boldsymbol{\left(x - \dfrac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{1-a^2}\right)^2}$

(2) (1) と同様に，$\mathrm{OP} : \mathrm{BP} = 1 : b$ を満たす点 P の軌跡は

$b = 1$ のとき　直線 $y = \dfrac{1}{2}$

$b \neq 1$ のとき　円 $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{1-b^2}\right)^2 = \left(\dfrac{b}{1-b^2}\right)^2$

ここで，(1) で求めた円を C_1，上の円を C_2 とする．

(i) $a = b = 1$ のとき，2 直線 $x = \dfrac{1}{2}$，$y = \dfrac{1}{2}$ は共有点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ をもつ．

(ii) $a = 1$，$b \neq 1$ のとき，C_2 の中心 $\left(0,\ \dfrac{1}{1-b^2}\right)$ から直線 $x = \dfrac{1}{2}$ までの距離と円の半径 $\dfrac{b}{|1-b^2|}$ の大小関係により

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{b}{|1-b^2|} \quad ゆえに \quad -2b \leqq b^2 - 1 \leqq 2b$$

これを解いて　$-1 + \sqrt{2} \leqq b \leqq 1 + \sqrt{2}$

(iii) $a \neq 1$，$b = 1$ のとき，(ii) と同様にして　$-1 + \sqrt{2} \leqq a \leqq 1 + \sqrt{2}$

(iv) $a \neq 1$，$b \neq 1$ のとき，C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とし，中心間の距離を d とすると

$$|r_1 - r_2| \leqq d \leqq r_1 + r_2 \quad ゆえに \quad |r_1 - r_2|^2 \leqq d^2 \leqq (r_1 + r_2)^2$$

整理すると　$-2r_1r_2 \leqq d^2 - {r_1}^2 - {r_2}^2 \leqq 2r_1r_2$

すなわち　$|d^2 - {r_1}^2 - {r_2}^2| \leqq 2r_1r_2 \quad \cdots (*)$

このとき

$$
\begin{aligned}
d^2-{r_1}^2-{r_2}^2 &= \left(\frac{1}{1-a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{1-b^2}\right)^2-\left(\frac{a}{1-a^2}\right)^2-\left(\frac{b}{1-b^2}\right)^2\\
&=\frac{1-a^2}{(1-a^2)^2}+\frac{1-b^2}{(1-b^2)^2}=\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2},\\
r_1r_2 &= \frac{a}{|1-a^2|}\cdot\frac{b}{|1-b^2|}=\frac{ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|}
\end{aligned}
$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\right| &\leqq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|}\\
|a^2+b^2-2| &\leqq 2ab\\
-2ab \leqq a^2+b^2-2 &\leqq 2ab
\end{aligned}
$$

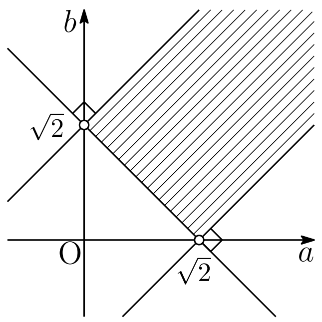
ゆえに　$(a+b)^2 \geqq 2$　かつ　$(a-b)^2 \leqq 2$

よって　$a>0,\ \ b>0,\ \ a+b \geqq \sqrt{2},\ \ |a-b| \leqq \sqrt{2} \quad \cdots (**)$

(i)〜(iii) の場合は $(**)$ に含まれることに注意すると，点 P が存在するための a，b の条件は

$$\boldsymbol{a>0,\ \ b>0,\ \ a+b \geqq \sqrt{2},\ \ |a-b| \leqq \sqrt{2}}$$

したがって，ab 平面上の不等式の表す領域は下の図の斜線部分で，○以外の境界線を含む．



$\boxed{4}$ (1) 2次方程式 $x^2+ax+a=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=a \quad \cdots(*)$$

上の2式から a を消去すると

$$\alpha\beta+\alpha+\beta=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha+1)(\beta+1)=1$$

$\alpha+1$，$\beta+1$ は整数であるから

$$\alpha+1=\beta+1=\pm1 \quad \text{これを解いて} \quad (\alpha,\ \beta)=(0,\ 0),\ (-2,-2)$$

$a>0$ および $(*)$ より，$\alpha\beta\neq0$ であるから

$$\alpha=\beta=-2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=4}$$

(2) 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の整数解を x_1，x_2 とすると $(x_1\leqq x_2)$，解と係数の関係により

$$x_1+x_2=-a, \quad x_1x_2=b \quad \cdots(*)$$

$a>0$，$b>0$ であるから　$x_1\leqq x_2\leqq-1 \quad \cdots$①

$a>b$ より，$b-a\leqq-1$ であるから

$$x_1x_2+x_1+x_2\leqq-1 \quad \text{ゆえに} \quad (x_1+1)(x_2+1)\leqq0 \quad \cdots②$$

①，② より，$x_1=-n,\ x_2=-1$ とおける (n は自然数)．これを $(*)$ に代入ことにより

$$a=n+1, \quad b=n \quad \cdots(**)$$

したがって，2次方程式 $y^2+by+a=0$，すなわち，$y^2+ny+n+1=0$ の整数解を $y_1,\ y_2$ とおくと，解と係数の関係により

$$y_1+y_2=-n, \quad y_1y_2=n+1 \quad \cdots③$$

これから，$y_1\leqq y_2\leqq-1$ とし，上の2式から n を消去すると

$$y_1y_2+y_1+y_2=1 \quad \text{ゆえに} \quad (y_1+1)(y_2+1)=2$$

したがって　$y_1+1=-2,\ y_2+1=-1$　すなわち　$y_1=-3,\ y_2=-2$

これを ③ に代入すると　$n=5$　さらに，$(**)$ より　$\boldsymbol{a=6,\ b=5}$ ■