平成20年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B・C

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b，c を実数として，$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ と単位行列 E に対して，$A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + 2E = O$ (ただし O は零行列) とする．

(1) b, c を a を用いて表せ，

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも 1 つ正の解を持つとき，a のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 三角形 ABC で辺 AC を $s : 1 - s$ に内分する点を P，辺 BC を $t : 1 - t$ に内分する点を Q，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする．このとき，

$$\triangle\text{APR の面積} = 2 \times (\triangle\text{BQR の面積})$$

が成り立っているとする．

(1) s を t を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{t \to +0} \frac{s}{t}$ を求めよ．ただし，t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき，$t \to +0$ と表す．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1 < a < b)$ をとる．

点 P，Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする．
点 P，Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする．

このとき，$S = T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問に答えよ．

(1) $3x + 2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

(2) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ．

$\boxed{5}$ 袋Aの中に赤玉と白玉がそれぞれ4つ入っていることと，袋Bの中に赤玉3つと白玉2つが入っていることが分かっている．

(1) 袋Bから2つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

(2) 袋Aから3つの玉を取り出し，そのあと袋Bから2つの玉を取り出す．その5つの玉のうち赤玉が3つである確率を求めよ．

(3) 袋Aから3つの玉を取り出したあとで，2つの玉を袋Aから取り出すかあるいは2つの玉を袋Bから取り出すかのどちらかを選択できるとする．できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) ハミルトン・ケーリーの定理を行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2 + 2A + 2E = O$$

ゆえに　$A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + 2E$

$$\begin{aligned} &= (A^2+2A+2E)\{A^2+(a-2)A+(-2a+b+2)E\} \\ &\quad +(2a-2b+c)A+2(2a-b-1)E \\ &= (2a-2b+c)A+2(2a-b-1)E = O \end{aligned}$$

$2a-2b+c \neq 0$ のとき，A は E のスカラー倍となり，不適．

したがって　$2a-2b+c=0,\ \ 2a-b-1=0$

よって　$\boldsymbol{b = 2a-1,\ c = 2a-2}$

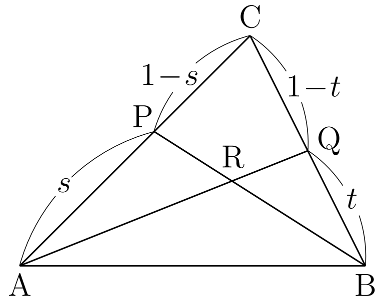
(2) (1) の結果から　$f(x) = (x^2+2x+2)\{x^2+(a-2)x+1\}$

方程式 $x^2+2x+2=0$ は実数解をもたないから，方程式 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つの正の解をもつ，すなわち，方程式 $x^2+(a-2)x+1=0$ が少なくとも 1 つの正の解をもつとき，係数について

$$-(a-2) > 0 \quad かつ \quad (a-2)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 \geqq 0$$

したがって　$a < 2$　かつ　$a \leqq 0,\ 4 \leqq a$　よって　$\boldsymbol{a \leqq 0}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) メネラウスの定理により



$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}}=1,\quad \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AP}}=1$$

したがって

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1-s}{s}=1,\quad \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1}{s}=1$$

ゆえに $\qquad \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}=\dfrac{s}{t(1-s)},\quad \dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{s(1-t)}{t}$

上の 2 式および与えられた条件から

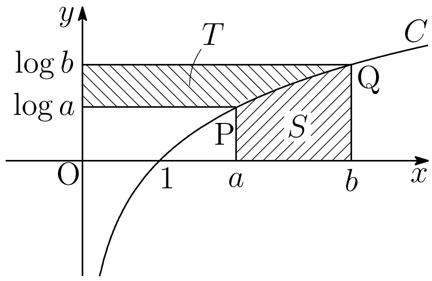
$$2=\frac{\mathrm{AR}\cdot\mathrm{PR}}{\mathrm{RQ}\cdot\mathrm{RB}}=\frac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)}\quad \text{ゆえに}\quad (1-t)s^2+2t^2s-2t^2=0$$

$s>0$ に注意して，s について解くと $\quad \boldsymbol{s=\dfrac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}}$

(2) (1) の結果から $\qquad \dfrac{s}{t}=\dfrac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$

よって $\qquad \displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ ■

3 曲線 $C: y=\log x$ のグラフから



$$S=\int_a^b \log x\,dx=\Big[\,x\log x - x\,\Big]_a^b$$
$$=b\log b - a\log a - b + a,$$
$$T=\int_{\log a}^{\log b} e^y\,dy=\Big[\,e^y\,\Big]_{\log a}^{\log b}$$
$$=b-a$$

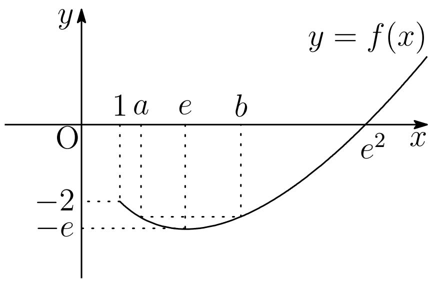
$S=T$ のとき

$$b\log b - a\log a - b + a = b - a \quad \text{ゆえに} \quad b\log b - 2b = a\log a - 2a$$

$f(x)=x\log x-2x$ とおくと $(x \geqq 1)$

$$f'(x)=\log x - 1$$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$



$a>1$ に注意すると，条件を満たす a の値の範囲は　　$\boldsymbol{1<a<e}$ ■

4 (1) $3x+2y=2n$ $(n=0,1,2,\cdots)\cdots$① を満たす 0 以上の整数 x, y は，
$3x=2(n-y)$ より，$x=2k$ (k は 0 以上の整数) とおくと

$$3\cdot 2k=2(n-y) \quad \text{ゆえに} \quad y=n-3k$$

このとき，$y \geqq 0$ より　$n-3k \geqq 0$　ゆえに　$k \leqq \dfrac{n}{3}$

したがって，① を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は　$\left[\dfrac{n}{3}\right]+1$

$3x+2y=2n-1$ $(n=1,2,3,\cdots)\cdots$② を満たす 0 以上の整数 x, y は，
$3(x+1)=2(n+1-y)$ より，$x+1=2k$ (k は 1 以上の整数) とおくと

$$3\cdot 2k=2(n+1-y) \quad \text{ゆえに} \quad y=n+1-3k$$

このとき，$y \geqq 0$ より　$n+1-3k \geqq 0$　ゆえに　$k \leqq \dfrac{n+1}{3}$

したがって，② を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は　$\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$

$N=334$ とおくと，$2008=2(3N+2)$

① より，$3x+2y=2n$ $(n=0,1,2,\cdots,3N+2)$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{3N+2}\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)&=\left(\left[\frac{0}{3}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)\\&\quad\cdots+\left(\left[\frac{3N}{3}\right]+\left[\frac{3N+1}{3}\right]+\left[\frac{3N+2}{3}\right]\right)+(3N+3)\\&=(0+3+\cdots+3N)+(3N+3)\\&=\frac{3}{2}N(N+1)+3(N+1)=\frac{3}{2}(N+1)(N+2)\end{aligned}$$

② より，$3x+2y=2n-1$ $(n=1,2,\cdots,3N+2)$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3N+2}\left[\frac{n+1}{3}\right]&=\left[\frac{2}{3}\right]+\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]\right)\\&\quad\cdots+\left(\left[\frac{3N}{3}\right]+\left[\frac{3N+1}{3}\right]+\left[\frac{3N+2}{3}\right]\right)+\left[\frac{3N+3}{3}\right]\\&=0+(3+6+\cdots+3N)+N+1\\&=\frac{3}{2}N(N+1)+(N+1)=\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)\end{aligned}$$

よって，$2x+3y\leqq 2008$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}(N+1)(N+2)+\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)&=(N+1)(3N+4)\\&=(334+1)(3\cdot 334+4)\\&=\mathbf{337010}\end{aligned}$$

定理 a，n を整数とすると，次式が成立する．

$$\text{(A)}\quad \boldsymbol{\left[\frac{a}{n}\right]+\left[\frac{a+1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{a+n-1}{n}\right]=a}$$

証明 連続する n 個の整数 $a,\ a+1,\cdots,a+n-1$ 中で n の倍数を $a+q$ とする．

$q=0$ のとき　(A) のすべての項が $\dfrac{a}{n}$ であるから，(A) の値は $\dfrac{a}{n}\cdot n=a$

$q\neq 0$ のとき　$\left[\dfrac{a}{n}\right]=\left[\dfrac{a+1}{n}\right]=\cdots=\left[\dfrac{a+q-1}{n}\right]=\dfrac{a+q}{n}-1,$

$$\left[\frac{a+q}{n}\right]=\left[\frac{a+q+1}{n}\right]=\cdots=\left[\frac{a+n-1}{n}\right]=\frac{a+q}{n}$$

(A) の値は $\left(\dfrac{a+q}{n}-1\right)q+\dfrac{a+q}{n}(n-q)=a$ 　　**証終**

(2) $2y+z=2M\ (M=0,1,2,\cdots)\cdots$③ を満たす 0 以上の整数 $y,\ z$ は
$z=2(M-y)$ より，$z=2k$ (k は 0 以上の整数) とおくと

$$2k=2(M-y)\quad \text{ゆえに}\quad y=M-k$$

このとき，$y \geqq 0$ より　$M-k \geqq 0$　ゆえに　$k=0,1,2,\cdots,M$
したがって，③ を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数は　$M+1$

$2y+z=2M-1\ (M=1,2,\cdots)\cdots$④ を満たす 0 以上の整数 $y,\ z$ は
$z+1=2(M-y)$ より，$z+1=2k$ (k は 1 以上の整数) とおくと

$$2k=2(M-y)\quad \text{ゆえに}\quad y=M-k$$

このとき，$y \geqq 0$ より　$M-k \geqq 0$　ゆえに　$k=1,2,\cdots,M$
したがって，④ を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数は　M
$2y+z \leqq 2L$ (L は 0 以上の整数) を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{M=0}^{L}(M+1)+\sum_{m=1}^{L}M &= \frac{1}{2}(L+1)(L+2)+\frac{1}{2}L(L+1)\\ &=(L+1)^2\end{aligned}$$

$2y+z \leqq 2L=n$ (L は 0 以上の整数) を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{M=0}^{L}(M+1)+\sum_{m=1}^{L}M &= \frac{1}{2}(L+1)(L+2)+\frac{1}{2}L(L+1)\\ &=(L+1)^2=\frac{1}{4}(n+2)^2\quad\cdots⑤\end{aligned}$$

$2y+z \leqq 2L-1=n$ (L は 0 以上の整数) を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{M=0}^{L-1}(M+1)+\sum_{m=1}^{L}M &= \frac{1}{2}L(L+1)+\frac{1}{2}L(L+1)\\ &=L(L+1)=\frac{1}{4}(n^2+4n+3)\\ &=\frac{1}{4}(n+2)^2-\frac{1}{4}\quad\cdots⑥\end{aligned}$$

⑤，⑥ より，$2y+z \leqq n$ (n は 0 以上の整数) を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数を $f(n)$ とすると

$$(*)\quad f(n)=\frac{1}{4}(n+2)^2-\frac{1}{4}\delta_n,\quad \delta_n=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ 1 & (n\text{ が奇数})\end{cases}$$

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ より

$$3x+2y+z \leqq 60 \quad \text{ゆえに} \quad 2y+z \leqq 3(20-x)$$

$k=20-x$ とおくと　$k=0, 1, 2, \cdots, 20$

$A=10$ とおくと，求める個数は，$(*)$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2A} f(3k) &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2A}(3k+2)^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2A}\delta_{3k} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2A}(9k^2+12k+4) - \frac{1}{4}A \\
&= \frac{1}{4}\left\{9\cdot\frac{1}{6}\cdot 2A(2A+1)(4A+1) + 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 2A(2A+1) + 4(2A+1) - A\right\} \\
&= \frac{1}{2}(12A^3+21A^2+11A+2) = \frac{1}{2}(A+1)(12A^2+9A+2) \\
&= \frac{1}{2}(12000+2100+110+2) \\
&= \frac{1}{2}\times 14212 = \mathbf{7106}
\end{aligned}$$

別解　(1) 座標平面上において，$x=k$ 上にある格子点の個数は

$$\left[1004-\frac{3}{2}k\right]+1=\left[1005-\frac{3}{2}k\right]$$

(i) $k=2m$ $(m=0,1,2,\cdots,334)$ のとき，格子点の個数は

$$\left[1005-\frac{3}{2}\cdot 2m\right]=1005-3m$$

(ii) $k=2m+1$ $(m=0,1,2,\cdots,334)$ のとき，格子点の個数は

$$\left[1005-\frac{3}{2}(2m+1)\right]=\left[1003-3m+\frac{1}{2}\right]=1003-3m$$

$A=334$ とおくと，$1005=3A+3,\ 1003=3A+1$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{A}(3A+3-3m)+\sum_{m=0}^{A}(3A+1-3m)\\ &=\sum_{m=0}^{A}(6A+4-6m)\\ &=(6A+4)(A+1)-6\cdot\frac{1}{2}A(A+1)\\ &=(A+1)(3A+4)\\ &=(334+1)(3\cdot 334+4)=\mathbf{337010}\end{aligned}$$

(2) 与えられた不等式から　$3x+2y+z \leqq 60$

(i) $x=2k$ $(k=0,1,2,\cdots,10)$ のとき

$$2y+z \leqq 6(10-k)$$

を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数は

$$\sum_{y=0}^{3(10-k)} \{6(10-k)+1-2y\}$$
$$=\{6(10-k)+1\}\{3(10-k)+1\}$$
$$-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3(10-k)\{3(10-k)+1\}$$
$$=(31-3k)^2$$

(ii) $x=2k-1$ $(k=1,2,3,\cdots,10)$ のとき

$$2y+z \leqq 63-6k$$

を満たす整数の組 $(y,\ z)$ の個数は

$$\sum_{y=0}^{31-3k} (63-6k+1-2y)$$
$$=(64-6k)(31-3k)-2\cdot\frac{1}{2}(31-3k)(32-3k)$$
$$=(33-3k)(32-3k)$$

$B=10$ とおくと，求める個数は

$$\sum_{k=0}^{B}(3B+1-3k)^2+\sum_{k=1}^{B}(3B+3-3k)(3B+2-3k)$$
$$=(3B+1)^2+\sum_{k=1}^{B}\{3(B+1-k)-2\}^2$$
$$+\sum_{k=1}^{B}3(B+1-k)\{3(B+1-k)-1\}$$
$$=(3B+1)^2+\sum_{k=1}^{B}\{(3k-2)^2+3k(3k-1)\}$$
$$=(3B+1)^2+\sum_{k=1}^{B}(18k^2-15k+4)$$
$$=6B^3+\frac{21}{2}B^2+\frac{11}{2}B+1=6000+1050+55+1=\mathbf{7106}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 袋Bから2個の玉を取り出すとき，赤玉がk個取り出される確率を$P_B(k)$とすると$(k=0,1,2)$

$$P_B(0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10},\quad P_B(1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5},\quad P_B(2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

よって，求める期待値は

$$0\cdot P_B(0)+1\cdot P_B(1)+2\cdot P_B(2)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{3}{10}=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

(2) 袋Aから3個の玉を取り出すとき，赤玉がk個取り出される確率を$P_A(k)$とすると$(k=0,1,2,3)$，求める確率は

$$\begin{aligned}&P_A(1)P_B(2)+P_A(2)P_B(1)+P_A(3)P_B(0)\\&=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\\&=\frac{6}{14}\cdot\frac{3}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{10}=\boldsymbol{\frac{11}{28}}\end{aligned}$$

(3) 袋Aから3つの玉を取り出した赤玉の個数によってその後に取り出す袋は次のように選択することになる．

(i) 袋Aから赤玉を0個取り出したとき，次に取り出す袋はAを選択する．

(ii) 袋Aから赤玉を1個取り出したとき，次に取り出す袋はAまたはBを選択する．

(iii) 袋Aから赤玉を2個以上取り出したとき，次に取り出す袋はBを選択する．

したがって，最終的に取り出される赤玉の個数をXとすると

$$\begin{aligned}P(X=1)&=P_A(0)\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+P_A(1)\cdot P_B(0)=\frac{1}{14}\cdot\frac{4}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{10}=\frac{10}{140},\\P(X=2)&=P_A(0)\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+P_A(1)\cdot P_B(1)+P_A(2)\cdot P_B(0)\\&=\frac{1}{14}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{10}=\frac{48}{140},\\P(X=3)&=\frac{55}{140}\qquad\text{((2)の結果から)}\\P(X=4)&=P_A(2)\cdot P_B(2)+P_A(3)\cdot P_B(1)=\frac{6}{14}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{14}\cdot\frac{6}{10}=\frac{24}{140},\\P(X=5)&=P_A(3)\cdot P_B(2)=\frac{1}{14}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{140}\end{aligned}$$

求める期待値は　$E(X)=1\cdot\frac{10}{140}+2\cdot\frac{48}{140}+3\cdot\frac{55}{140}+4\cdot\frac{24}{140}+5\cdot\frac{3}{140}=\boldsymbol{\frac{191}{70}}$

別解 袋 A から 0 個の赤玉が取り出されたとき，残りの 5 個の玉 (赤玉 4 個，白玉 1 個) から 2 個取り出すとき，赤玉を取り出す個数の期待値は

$$1\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+2\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{8}{5}$$

よって，求める期待値は，これと (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}E(X)&=P_A(0)\cdot\frac{8}{5}+P_A(1)\left(1+\frac{6}{5}\right)+P_A(2)\left(2+\frac{6}{5}\right)+P_A(3)\left(3+\frac{6}{5}\right)\\&=\frac{1}{14}\cdot\frac{8}{5}+\frac{6}{14}\cdot\frac{11}{5}+\frac{6}{14}\cdot\frac{16}{5}+\frac{1}{14}\cdot\frac{21}{5}=\boldsymbol{\frac{191}{70}}\end{aligned}$$

■