平成19年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報)　数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 必答，4 5 から1題選択

1 2行2列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．a，b，d が実数で $c=0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を上三角行列という．また，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $A^2=E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ．

(2) $A^3=E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ．

(3) 上三角行列 A が $A^4=E$ をみたすとき，$A^2=E$ となることを示せ．

2 (1) 関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ．

(2) 方程式 $f(x)=a$ (a は実数) が相異なる3つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ を持つとする．$\ell=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ．

(3) a が (2) の条件のもとで変化するとき ℓ の動く範囲を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ を次の規則によって定める：

$$a_1=1 \ ; \quad \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

曲線 $y=1/\sqrt[3]{x}$ と，x 軸および2直線 $x=a_n$，$x=a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させた回転体の体積を V_n とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n$ を求めよ．　※ $y=1/\sqrt[3]{x}$ は $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ を意味する．

4 原点 O(0, 0) を中心とする半径1の円に，円外の点 P$(x_0,\ y_0)$ から2本の接線を引く．

(1) 2つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 $(x_1,\ y_1)$ を点 P の座標 $(x_0,\ y_0)$ を用いて表せ．また OP·OQ $=1$ であることを示せ．

(2) 点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

5 袋の中に赤と黄と青の玉が1個ずつ入っている．「この袋から玉を1個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に1個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする．

(1) 連比 $p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)$ を求めよ．

(2) 一般の N に対し $p_N(m)$ $(1\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$A^2-(a+d)A+adE=O \quad \cdots (*)$$

$A^2=E$ であるから

$$(a+d)A=(ad+1)E$$

$a+d\neq 0$ のとき，A は E のスカラー倍であるから，$A^2=E$ より　$A=\pm E$

$a+d=0$ のとき，$ad+1=0$ と連立すると　$(a,\ d)=(\pm 1, \mp 1)$

よって　$\boldsymbol{A=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}},\ \begin{pmatrix} \pm\mathbf{1} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \mp\mathbf{1} \end{pmatrix}$ **($\boldsymbol{b}$ は任意の実数)**

(2) $A^3=E$ より

$$\det A^3=\det E \quad \text{ゆえに} \quad (\det A)^3=1 \quad \text{すなわち} \quad \det A=1$$

$t=\mathrm{tr}A$ とおくと，ハミルトン・ケーリーの定理により　$A^2-tA+E=O$

$A^2=tA-E$ であるから

$$A^3=A(tA-E)=tA^2-A=t(tA-E)-A=(t^2-1)A-tE$$

$A^3=E$ より

$$E=(t^2-1)A-tE \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)\{(t-1)A-E\}=O$$

(i) $t=-1$ のとき，$a+d=\mathrm{tr}A=-1$，$ad=\det A=1$ より，$a,\ d$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2+x+1=0 \quad \text{係数について} \quad D=1^2-4\cdot 1=-3<0$$

これは，$a,\ d$ が実数であることに反するの不適．

(ii) $t\neq -1$ のとき，$(t-1)A-E=O$ より，A は E のスカラー倍で，$A^3=E$ であるから

$$A=E$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(3) $A^4 = E$ より

$$\det A^4 = \det E \quad ゆえに \quad (\det A)^4 = 1 \quad すなわち \quad \det A = \pm 1$$

$t = \mathrm{tr}A$，$\varepsilon = \det A$ とおくと，ハミルトン・ケーリーの定理により

$$A^2 - tA + \varepsilon E = O \quad (\varepsilon^2 = 1)$$

$A^2 = tA - \varepsilon E \cdots (*)$ より

$$\begin{aligned} A^4 &= (tA - \varepsilon E)^2 = t^2A^2 - 2\varepsilon tA + E \\ &= t^2(tA - \varepsilon E) - 2\varepsilon tA + E \\ &= t\{(t^2 - 2\varepsilon)A - \varepsilon tE\} + E \end{aligned}$$

$A^4 = E$ であるから

$$t\{(t^2 - 2\varepsilon)A - \varepsilon tE\} = 0$$

(i) $t = 0$ のとき，$a + d = 0$ より

$$\varepsilon = ad = -a^2 \quad ゆえに \quad \varepsilon = -1 \quad (*) より \quad A^2 = E$$

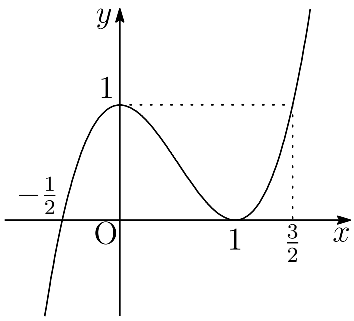
(ii) $t \neq 0$ のとき，$(t^2 - 2\varepsilon)A - \varepsilon tE = O$ より，A は E のスカラー倍で，$A^4 = E$ であるから　$A = \pm E$

(i)，(ii) より　　$A^2 = E$　■

2 (1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$ より

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$



$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

(2) 方程式 $f(x)=a$ の実数解は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の x 座標である．方程式 $f(x)=a$ が相異なる 3 つの実数解をもつとき，(1) のグラフから，a のとり得る値の範囲は

$$0<a<1$$

方程式 $f(x)-a=0$，すなわち，3 次方程式

$$2x^3-3x^2+1-a=0$$

の解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$$

上の 2 式から

$$\gamma+\alpha=\frac{3}{2}-\beta,\quad \gamma\alpha=-\beta(\gamma+\alpha)=-\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)$$

したがって
$$\begin{aligned}(\gamma-\alpha)^2&=(\gamma+\alpha)^2-4\gamma\alpha\\&=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\\&=3\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\end{aligned}$$

$\gamma>\alpha$ より，$\gamma-\alpha>0$ であるから

$$\ell=\gamma-\alpha=\boldsymbol{\sqrt{3\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}}$$

(3) (2) の結果から $\quad \ell=\sqrt{-3\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+3}$

(1) のグラフから，$0<\beta<1$ であるから $\quad \boldsymbol{\frac{3}{2}<\ell\leqq\sqrt{3}}$ ■

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 1$ より

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left[\ \sqrt[3]{x^2}\ \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = \frac{3}{2}\left({a_{n+1}}^{\frac{2}{3}} - {a_n}^{\frac{2}{3}}\right) = 1$$

ゆえに　${a_{n+1}}^{\frac{2}{3}} - {a_n}^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

数列 $\{{a_n}^{\frac{2}{3}}\}$ は初項 ${a_1}^{\frac{2}{3}} = 1$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$${a_n}^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2n+1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

回転体の体積 V_n は

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{\pi} &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = 3\left[\ x^{\frac{1}{3}}\ \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = 3({a_{n+1}}^{\frac{1}{3}} - {a_n}^{\frac{1}{3}}) \\ &= 3\left(\sqrt{\frac{2n+3}{3}} - \sqrt{\frac{2n+1}{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}\end{aligned}$$

したがって

$$\sqrt{n}\,V_n = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}} + \sqrt{2+\dfrac{1}{n}}} \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,V_n = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}\pi}{2}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を極とする円 $x^2 + y^2 = 1$ の極線は　$x_0x + y_0y = 1$

直線 OP は　$y_0x - x_0y = 0$

点 Q は上の 2 直線の交点であるから　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}\right)$

したがって　$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2},\quad y_1 = \dfrac{y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}}$

2 点 P，Q の座標より　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$　よって　$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = 1$

(2) 点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ が直線 $x+y=2$ 上にあるから

$$x_0 = 1-\tan\theta,\quad y_0 = 1+\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおいて，(1) の結果に代入すると

$$x_1 = \frac{1-\tan\theta}{(1-\tan\theta)^2+(1+\tan\theta)^2} = \frac{1-\tan\theta}{2(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{2}(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2\theta - \sin 2\theta + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+\tan\theta}{(1-\tan\theta)^2+(1+\tan\theta)^2} = \frac{1+\tan\theta}{2(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \cos 2\theta + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

よって $\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8},\quad (x,\ y)\neq(0,\ 0)}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ に対し，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると $x_0 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$，$y_0 = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

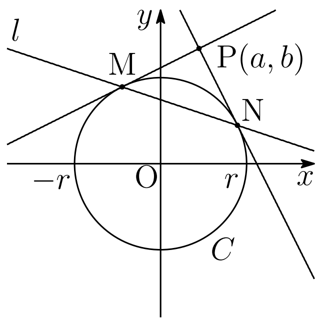
$x_0+y_0=2$ であるから $\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^2}=2$

したがって $x^2+y^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y=0$

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ より，$\mathrm{OP}\neq 0$ に注意して

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8},\quad (x,\ y)\neq(0,\ 0)}$$

円 $C:\ x^2+y^2=r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ とする．2 本の接線



$$x_1x+y_1y=r^2,\quad x_2x+y_2y=r^2$$

は点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$ax_1+by_1=r^2,\quad ax_2+by_2=r^2$$

上の 2 式から直線 $l: ax+by=r^2$ は 2 点 M，N を通る．

このとき，l を P を極とする C の極線という．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $p_3(1)$ は，3 回とも赤以外の玉が出る確率であるから

$$p_3(1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$p_3(4)$ は，3 回とも赤玉が出る確率であるから

$$p_3(4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

$p_3(2)$ は，1 回だけ赤玉が出る確率で，1 回目，2 回目，3 回目に赤玉である確率は，それぞれ

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5},\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5},\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}$$

したがって　$p_3(2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

$p_3(1) + p_3(2) + p_3(3) + p_3(4) = 1$ であるから

$$p_3(3) = 1 - (p_3(1) + p_3(2) + p_3(4)) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5}$$

よって　$p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4) = \frac{2}{5} : \frac{3}{10} : \frac{1}{5} : \frac{1}{10} = \mathbf{4 : 3 : 2 : 1}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} &p_N(1) : p_N(2) : \cdots : p_N(m) : \cdots : p_N(N+1) \\ &\qquad = N+1 : N : \cdots : (N+2-m) : \cdots : 1 \end{aligned}$$

であると推測すると $(m = 1, 2, \cdots, N+1)$

$$\begin{aligned} p_N(m) &= \frac{N+2-m}{(N+1)+N+\cdots+1} \\ &= \frac{N+2-m}{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} = \frac{2(N+2-m)}{(N+1)(N+2)} \qquad \cdots (*) \end{aligned}$$

［1］$p_1(1)=\dfrac{2}{3}$，$p_1(2)=\dfrac{1}{3}$ より，$N=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］自然数 $N=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定する．

$k+1$ 回の操作で赤玉が m 個となるのは，次の場合がある．

- k 回の操作で赤玉が m 個で，$k+1$ 目に赤玉以外を取り出す．
- k 回の操作で赤玉が $m-1$ 個で，$k+1$ 目に赤玉を取り出す．

これから

$$
\begin{aligned}
p_{k+1}(m) &= p_k(m)\cdot\frac{k+3-m}{k+3}+p_k(m-1)\cdot\frac{m-1}{k+3}\\
&= \frac{2(k+2-m)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{k+3-m}{k+3}+\frac{2(k+3-m)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{m-1}{k+3}\\
&= \frac{2(k+3-m)\{(k+2-m)+(m-1)\}}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&= \frac{2(k+3-m)}{(k+2)(k+3)}
\end{aligned}
$$

したがって，$N=k+1$ についても $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 N について，$(*)$ が成立する．

別解 $m-1$ 個の赤玉と $N-m+1$ 個の赤玉以外の玉を取り出す確率は

$$
\frac{\square}{3}\cdot\frac{\square}{4}\cdots\frac{\square}{N+2}\qquad\cdots(**)
$$

N 個の $\square\square\cdots\square$ において赤玉と赤玉以外の玉を取り出す順番の組合せは ${}_N\mathrm{C}_{m-1}$ 通り．$(**)$ の $\square$ には赤玉を取り出す順に $1,\ 2,\ \cdots,\ (m-1)$，赤玉以外の玉を取り出す順に $2,\ 3,\ \cdots,\ (N-m+2)$ が入る．よって

$$
\begin{aligned}
p_N(m) &= \frac{{}_N\mathrm{C}_{m-1}\cdot(m-1)!(N-m+2)!}{\frac{(N+2)!}{2}}\\
&= \frac{N!(m-1)!(N-m+2)!}{(m-1)!(N-m+1)!}\cdot\frac{2}{(N+2)!}\\
&= \frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}
\end{aligned}
$$

■