

平成 18 年度 名古屋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分  
理・工・農・医・情報文化 (自然情報) 数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1  $xy$  平面上に曲線  $C: y = \log x$  ( $x > 0$ ) を考える.

- (1) 曲線  $C$  の接線で点  $(0, b)$  を通るものの方程式を求めよ.
- (2) 平面上に 2 組の点列  $\{A_n\}$ ,  $\{B_n\}$  を次のように定める.  $A_1$  を  $(1, 0)$  とする.  $A_n$  が定まったとき,  $A_n$  を通り  $x$  軸に平行な直線と  $y$  軸との交点を  $B_n$  とし,  $B_n$  を通る曲線  $C$  の接線の接点を  $A_{n+1}$  とする. このとき, 2 つの線分  $A_n B_n$  と  $B_n A_{n+1}$  および曲線  $C$  とで囲まれる部分の面積  $S_n$  を求めよ.
- (3) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n}$  の和を求めよ. ここで,  $|r| < 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$  であることを用いてよい.

2  $s$  を実数とする.  $(u_1, v_1) = (s, 1)$  とし,  $(u_n, v_n)$  ( $n \geq 2$ ) を次の漸化式で定める.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$s$  が実数全体を動くとき,  $(u_n, v_n)$  が描く  $xy$  平面上の図形を  $\ell_n$  とする.

- (1) 図形  $\ell_n$  ( $n \geq 1$ ) の方程式を求めよ.
- (2)  $\ell_{2k-1}$  ( $k$  は正の整数) と  $y$  軸との交点を中心とし,  $\ell_{2k}$  に接する円の方程式を求めよ.

3 座標平面上に 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(4, 2)$ ,  $B(6, 0)$  を考える. 平面上の直線  $\ell$  に関して点  $A$  と対称な点が線分  $OB$  上にあるとき, 直線  $\ell$  をピッタリ直線と呼ぶことにする.

- (1) 点  $P(p, q)$  を通るピッタリ直線  $\ell$  があるとし,  $\ell$  に関して  $A$  と対称な点を  $A'(t, 0)$  ( $0 \leq t \leq 6$ ) とするとき,  $p, q, t$  の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (2) ピッタリ直線が 2 本通る点  $P(p, q)$  の存在範囲を求め, それを図示せよ. 図には三角形  $OAB$  も書いておくこと.
- (3) 点  $P(p, q)$  を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点  $P(p, q)$  の存在範囲を求め, それを図示せよ.

- 4 正六面体の各面に1つずつ、サイコロのように、1から6までの整数がもれなく書かれていて、向かい合う面の数の和は7である．このような正六面体が底面の数字が1であるように机の上におかれている．この状態から始めて、次の試行を繰り返し行う．「現在の底面と隣り合う4面のうちの1つを新しい底面にする．」ただし、これらの4面の数字が $a_1, a_2, a_3, a_4$ のとき、それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする．この試行を $n$ 回繰り返した後、底面の数字が $m$ である確率を $p_n(m)$  ( $n \geq 1$ ) で表す．

(1)  $n \geq 1$  のとき、 $q_n = p_n(1) + p_n(6)$ ,  $r_n = p_n(2) + p_n(5)$ ,  $s_n = p_n(3) + p_n(4)$  を求めよ．

(2)  $p_n(m)$  ( $n \geq 1, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) を求めよ．

## 解答例

1 (1)  $C: y = \log x$  より  $y' = \frac{1}{x}$

$C$  上の点  $(t, \log t)$  における接線の方程式は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{t} - 1 + \log t$$

これが点  $(0, b)$  を通るとき  $-1 + \log t = b$  ゆえに  $t = e^{b+1} \dots (*)$

よって、求める直線の方程式は  $y = \frac{x}{e^{b+1}} + b$

- (2) 点  $A_n$  の  $x$  座標を  $a_n$ , 点  $B_n$  の  $y$  座標を  $b_n$  とすると

$$b_n = \log a_n \quad \dots \textcircled{1}$$

① より、点  $A_{n+1}$  における接線の  $y$  切片が  $b_n$  であるから

$$a_{n+1} = e^{b_n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より  $a_{n+1} = ee^{b_n} = ea_n$

$a_1 = 1$  であるから,  $a_n$  は初項 1, 公比  $e$  の等比数列であるから  $a_n = e^{n-1}$

これを ① に代入して  $b_n = n - 1$

$S_n$  は, 右の図の斜線部分の面積であるから

$$S_n = \int_{n-1}^n e^y dy - \triangle B_n B_{n+1} A_{n+1} = \left[ e^y \right]_{n-1}^n - \frac{1}{2} e^n = \frac{e^{n-1}}{2} (e - 2)$$

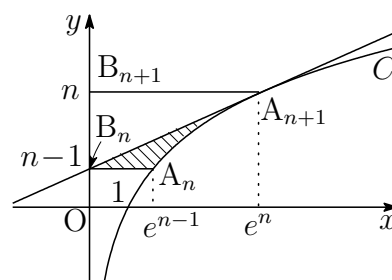
(3) (2) の結果から  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n} = \frac{2}{e-2} \sum_{n=1}^{\infty} n(e^{-1})^{n-1}$

ここで,  $-1 < t < 1$  について,  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$  とすると

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n} &= \frac{2}{e-2} f'(e^{-1}) = \frac{2}{e-2} \cdot \frac{1}{(1-e^{-1})^2} \\ &= \frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2} \end{aligned}$$

■



**2** (1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  とおくと、ハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 + 3E = 0 \quad \text{ゆえに} \quad A^2 = -3E$$

(i)  $n$  が奇数のとき

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= (A^2)^{\frac{n-1}{2}} = (-3E)^{\frac{n-1}{2}} = (-3)^{\frac{n-1}{2}} E, \\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-1}{2}} E \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \ell_n : y = (-3)^{\frac{n-1}{2}}$$

(ii)  $n$  が偶数のとき

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= (A^2)^{\frac{n-2}{2}} A = (-3E)^{\frac{n-2}{2}} A = (-3)^{\frac{n-2}{2}} A, \\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-2}{2}} A \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-2}{2}} \begin{pmatrix} s-2 \\ 2s-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 2u_n - v_n = (-3)^{\frac{n-2}{2}} \cdot (-3)$$

$$\text{よって} \quad \ell_n : 2x - y - (-3)^{\frac{n}{2}} = 0$$

(2) (1) の結果から

$$\ell_{2k-1} : y = (-3)^{k-1}, \quad \ell_{2k} : 2x - y - (-3)^k = 0$$

点  $\ell_{2k-1}$  と  $y$  軸との交点  $(0, (-3)^{k-1})$  と直線  $\ell_{2k}$  の距離  $r$  は

$$r = \frac{|2 \cdot 0 - (-3)^{k-1} - (-3)^k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2 \cdot 3^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

よって、求める円の方程式は

$$x^2 + \{y - (-3)^{k-1}\}^2 = \frac{4 \cdot 3^{2k-2}}{5}$$

■

- 3** (1)  $\ell$  は 2 点  $A(4, 2)$ ,  $A'(t, 0)$  を結ぶ線分  $AA'$  の垂直二等分線であるから,  
 $\ell$  上の点を  $Q(x, y)$  とすると,  $AQ^2 = A'Q^2$  であるから

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = (x-t)^2 + y^2$$

これを整理すると  $(8-2t)x + 4y + t^2 - 20 = 0 \quad \cdots (*)$

この直線上に点  $P(p, q)$  があるから  $(8-2t)p + 4q + t^2 - 20 = 0$

$$\text{よって} \quad t^2 - 2pt + 8p + 4q - 20 = 0$$

- (2) (1) の結果から,  $f(t) = t^2 - 2pt + 8p + 4q - 20 \cdots (**)$  とおくと

$$f(t) = (t-p)^2 - p^2 + 8p + 4q - 20$$

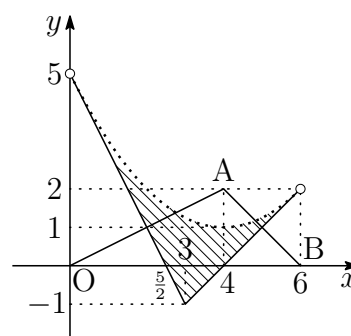
$f(t) = 0$  の異なる 2 つの実数解がともに  $0 \leq t \leq 6$  となる条件であるから

$$\begin{cases} -p^2 + 8p + 4q - 20 < 0 \\ 0 \leq p \leq 3 \text{ のとき} & f(0) \geq 0 \\ 3 \leq p \leq 6 \text{ のとき} & f(6) \geq 0 \end{cases}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$\begin{cases} q < \frac{1}{4}(p-4)^2 + 1 \\ 0 \leq p \leq 3 \text{ のとき} & q \geq -2p + 5 \\ 3 \leq p \leq 6 \text{ のとき} & q \geq p - 4 \end{cases}$$

よって, 点  $P$  の存在範囲は, 右の斜線部分で,  
 ○および点線部分は含まない.



- (3) ピッタリ直線が直交するときの 2 つの  $t$  の値を  $\alpha, \beta$  とすると, 2 次方程式  $f(t) = 0$  の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2p, \quad \alpha\beta = 8p + 4q - 20 \quad (\text{A})$$

(\*) から, それぞれのピッタリ直線の法線ベクトルを

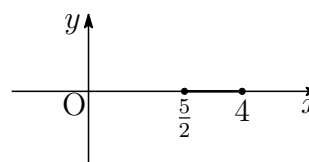
$$\vec{n}_\alpha = (8 - 2\alpha, 4), \quad \vec{n}_\beta = (8 - 2\beta, 4)$$

とすると,  $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$  より,  $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$  であるから

$$\alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 20 = 0 \quad \text{これに (A) を代入すると} \quad q = 0$$

(2) で求めた領域から,  $q = 0$  のとき

$$\frac{5}{2} \leq p \leq 4$$



よって, 求める領域は, 右の図の両端を含む線分である.



- 4 (1) (i)  $n$  回の試行後, 1 または 6 が底面にあるとき,  $n+1$  回目に 2 または 5 が底面となる確率および 3 または 4 が底面となる確率は, それぞれ

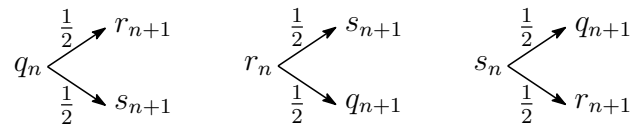
$$\frac{2+5}{2+3+4+5} = \frac{1}{2}, \quad \frac{3+4}{2+3+4+5} = \frac{1}{2}$$

- (ii)  $n$  回の試行後, 2 または 5 が底面にあるとき,  $n+1$  回目に 3 または 4 が底面となる確率および 1 または 6 が底面となる確率は, それぞれ

$$\frac{3+4}{1+3+4+6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1+6}{1+3+4+6} = \frac{1}{2}$$

- (iii)  $n$  回の試行後, 3 または 4 が底面にあるとき,  $n+1$  回目に 1 または 6 が底面となる確率および 2 または 5 が底面となる確率は, それぞれ

$$\frac{1+6}{1+2+5+6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2+5}{1+2+5+6} = \frac{1}{2}$$



- (i)~(iii) および初期条件から次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} q_1 &= 0, \quad r_1 = s_1 = \frac{1}{2}, \\ q_{n+1} &= \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2}(1 - q_n), \\ r_{n+1} &= \frac{1}{2}s_n + \frac{1}{2}q_n = \frac{1}{2}(1 - r_n), \\ s_{n+1} &= \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n = \frac{1}{2}(1 - s_n) \end{aligned}$$

これを解くと

$$q_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 + 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}, \quad r_n = s_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

- (2) 1 または 6 が底面にある事象を  $Q$ , 2 または 5 が底面にある事象を  $R$ , 3 または 4 が底面にある事象を  $S$  とする.

$n$  回目の試行後に底面の数字が 1, 6 となるは,  $n-1$  回目で  $R$ ,  $S$  のときである. (1) の結果から, それぞれ

$$\begin{aligned} P_n(1) &= \frac{1}{1+3+4+6}r_{n-1} + \frac{1}{1+2+5+6}s_{n-1} = \frac{1}{14}r_{n-1} + \frac{1}{14}s_{n-1} \\ &= \frac{1}{42} \left\{ 2 - 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{21} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}, \\ P_n(6) &= \frac{6}{1+3+4+6}r_{n-1} + \frac{6}{1+2+5+6}s_{n-1} = \frac{3}{7}r_{n-1} + \frac{3}{7}s_{n-1} \\ &= \frac{1}{7} \left\{ 2 - 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

$n$  回目の試行後に底面の数字が 2, 5 となるは,  $n-1$  回目で  $S$ ,  $Q$  のときである. (1) の結果から, それぞれ

$$\begin{aligned} P_n(2) &= \frac{2}{1+2+5+6}s_{n-1} + \frac{2}{2+3+4+5}q_{n-1} = \frac{1}{7}s_{n-1} + \frac{1}{7}q_{n-1} \\ &= \frac{1}{21} \left\{ 2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{2}{21} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}, \\ P_n(5) &= \frac{5}{1+2+5+6}s_{n-1} + \frac{5}{2+3+4+5}q_{n-1} = \frac{5}{42}s_{n-1} + \frac{5}{42}q_{n-1} \\ &= \frac{5}{42} \left\{ 2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{5}{21} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

$n$  回目の試行後に底面の数字が 3, 4 となるは,  $n-1$  回目で  $Q$ ,  $R$  のときである. (1) の結果から, それぞれ

$$\begin{aligned} P_n(3) &= \frac{3}{2+3+4+5}q_{n-1} + \frac{3}{1+3+4+6}r_{n-1} = \frac{3}{14}q_{n-1} + \frac{3}{14}r_{n-1} \\ &= \frac{1}{14} \left\{ 2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}, \\ P_n(4) &= \frac{4}{2+3+4+5}q_{n-1} + \frac{4}{1+3+4+6}r_{n-1} = \frac{2}{7}q_{n-1} + \frac{2}{7}r_{n-1} \\ &= \frac{2}{21} \left\{ 2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{4}{21} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

