平成 16 年度　名古屋大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 必答， 4 5 から 1 題選択

1 サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える．ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームは終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る．たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する．なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく．

(1) p_2 を求めよ．

(2) p_3 を求めよ．

(3) 4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ．

2 $a,\ b,\ c$ を実数とし，実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に関する方程式

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} x+y-2z=3a \\ 2x-y-z=3b \\ x-5y+4z=3c \end{cases} \qquad \text{および} \quad \text{(ii)}\quad x^2+y^2+z^2=1$$

を考える．

(1) 方程式 (i) が解をもつための $a,\ b,\ c$ に対する条件を求めよ．またそのときの方程式 (i) の解 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ．

(2) 方程式 (i) と (ii) がただ一つの共通解をもつとき，その共通解 $(x,\ y,\ z)$ は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ をみたすことを示せ．

3 多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,1,2,\cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x), \quad n=2,3,4,\cdots$$

をみたすとする．

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta,\ n=0,1,2,\cdots$ であることを示せ．

(2) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく．このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ．

4 $C_1,\ C_2,\ C_3$ は，半径がそれぞれ $a,\ a,\ 2a$ の円とする．いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，$C_1,\ C_2,\ C_3$ は互いに外接しているとき，a の値を求めよ．

5 正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

で定める．このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ．

解答例

1 (1) 1回目に出た目を x_1，2回目に出た目を x_2 とすると，2回目で終了するとき，$x_1+x_2=8$ となる次の5組である．

$$(x_1,\ x_2)=(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{5}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(2) 2回目で終了しないとき，その時点の数直線上の座標は2〜7の6通り．

2回目で終了しないときに3回目で終了する確率 (条件付き確率) が $\dfrac{1}{6}$ であるから，3回目で終了する確率は

$$(1-p_2)\times\frac{1}{6}=\left(1-\frac{5}{36}\right)\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{31}{216}}$$

(3) (2) の考察から

3回目で終了しない確率は $\quad (1-p_2)\times\dfrac{5}{6}$

4回目で終了しない確率は $\quad (1-p_2)\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$

$\vdots$

$n-1$ 回目で終了しない確率は $\quad (1-p_2)\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

よって，n 回目で終了する確率は $(n\geqq 4)$

$$(1-p_2)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\times\frac{1}{6}=\frac{31}{6^2}\times\frac{5^{n-3}}{6^{n-3}}\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{31\cdot 5^{n-3}}{6^n}}$$

■

2 (1) (i) $\begin{cases} x+y-2z=3a \\ 2x-y-z=3b \\ x-5y+4z=3c \end{cases}$ および (ii) $x^2+y^2+z^2=1$

(i) の第 1 式と第 2 式の辺々を加えると

$$3x-3z=3a+3b \quad \text{ゆえに} \quad x=z+a+b \quad \cdots ①$$

① を (i) の第 1 式に代入すると

$$(z+a+b)+y-2z=3a \quad \text{ゆえに} \quad y=z+2a-b \quad \cdots ②$$

①，② を (i) の第 3 式に代入すると

$$(z+a+b)-5(z+2a-b)+4z=3c \quad \text{ゆえに} \quad -9a+6b=3c$$

よって，(i) が解をもつための条件は $\boldsymbol{c=-3a+2b}$

また，①，② より $x-a-b=y-2a+b=z$

$z=t$ とおくと (t は実数)，方程式 (i) の解は

$$\boldsymbol{x=t+a+b,\quad y=t+2a-b,\quad z=t} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ は任意の実数)}$$

(2) (1) の結果を (ii) に代入すると

$$(t+a+b)^2+(t+2a-b)^2+t^2=1$$

t について整理すると

$$3t^2+6at+5a^2-2ab+2b^2-1=0 \qquad (*)$$

(i) と (ii) がただ一つの共通解をもつとき，t の 2 次方程式 $(*)$ は重解をもつから，その係数について

$$D/4=(3a)^2-3(5a^2-2ab+2b^2-1)=0$$

したがって $2a^2-2ab+2b^2=1 \quad \cdots ③$

このとき，$(*)$ の解は $t=-\dfrac{6a}{2\cdot 3}=-a$

これを (1) の結果に代入して $x=b,\ y=a-b,\ z=-a$

よって，共通解 $(x,\ y,\ z)$ は ③ により，次式を満たす．

$$\begin{aligned} 2x^2+2xy+2y^2 &= 2b^2+2b(a-b)+2(a-b)^2 \\ &= 2a^2-2ab+2b^2=1 \end{aligned}$$

■

3 (1) 多項式の列 $f_n(x),\ n=0,1,2,\cdots$ が,

$$f_0(x)=2,\quad f_1(x)=x,$$
$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\quad n=2,3,4,\cdots$$

をみたすとき

$$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{A}$$

とする.

［1］$n=0,\ 1$ のとき，(A) は成立する.

［2］$n\leqq k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta&=\cos(k\theta+\theta)\\&=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta\\\cos(k-1)\theta&=\cos(k\theta-\theta)\\&=\cos k\theta\cos\theta+\sin k\theta\sin\theta\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta=2\cos k\theta\cos\theta$$

したがって　$\cos(k+1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta$

(A) および定義された漸化式により

$$\begin{aligned}2\cos(k+1)\theta&=2\cos\theta\cdot2\cos k\theta-2\cos(k-1)\theta\\&=(2\cos\theta)f_k(2\cos\theta)-f_{k-1}(2\cos\theta)\\&=f_{k+1}(2\cos\theta)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成立する.

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する.

補足 定義された漸化式により，$f_n(x)$ は，x の n 次多項式である.

(2) $|x| \leqq 2$ より，$x = 2\cos\theta$ とおくと，(1) の結果より，方程式

$$f_n(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2\cos n\theta = 0$$

の最大の実数解 x_n は，$n\theta = \dfrac{\pi}{2}$ より $\qquad x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2n}$

$x = 2\cos\theta$ より $\quad \dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta$

x	$x_n \longrightarrow 2$
θ	$\frac{\pi}{2n} \longrightarrow 0$

$$\int_{x_n}^{2} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{0} f(2\cos\theta)\cdot(-2\sin\theta)\,d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}} 2\cos n\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}} \{\sin(n+1)\theta - \sin(n+1)\theta\}\,d\theta$$

$$= 2\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2n}}$$

$$= -\frac{2}{n+1}\left(\cos\frac{n+1}{2n}\pi - 1\right) + \frac{2}{n-1}\left(\cos\frac{n-1}{2n}\pi - 1\right)$$

$$= -\frac{2}{n+1}\left(-\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right) + \frac{2}{n-1}\left(\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{n^2-1}\left(n\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right)}$$

(3) (2) の結果および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n} = 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2-1}\left(n\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{1-\frac{1}{n^2}}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n} - 1\right)$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - 1\right) = \boldsymbol{2\pi - 4}$$

補足 $[a]$ を a 以下の最大の整数とすると

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_n\mathrm{C}_{2k}\{i^{2k} + (-i)^{2k}\}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_n\mathrm{C}_{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}\theta(1-\cos^2\theta)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_n\mathrm{C}_{2k}\cos^{n-2k}\theta(\cos^2\theta - 1)^k$$

■

4 C_1, C_2, C_3 の中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3 とすると

$$\mathrm{OO}_1 = 1-2a, \quad \mathrm{OO}_2 = 1-a, \quad \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2 = 3a$$

C_1 と C_2 の接点を T とし，$\theta = \angle \mathrm{TO}_1\mathrm{O}_2$ とすると

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{O}_2\mathrm{T}}{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

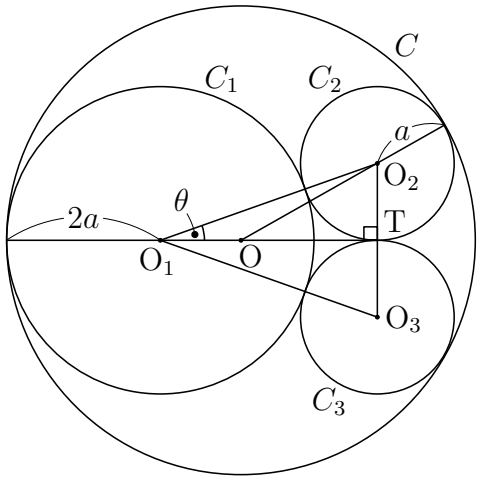
$\triangle \mathrm{OO}_1\mathrm{O}_2$ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{OO_2}^2 = \mathrm{OO_1}^2 + \mathrm{O_1O_2}^2 - 2\mathrm{OO_1}\cdot\mathrm{O_1O_2}\cos\theta$$

したがって $\quad (1-a)^2 = (1-2a)^2 + (3a)^2 - 2(1-2a)\cdot 3a\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

整理すると $\quad 2(3+2\sqrt{2})a^2 = (1+2\sqrt{2})a$

$a \neq 0$ より $\quad a = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})} = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}}$



■

5 正の整数 a と b が互いに素であるとき

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \quad (n \geqq 2) \qquad (*)$$

で定義された正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ について，先ず次を示す．

(A)　$\{x_n\}$ は整数 b と互いに素である．

条件から，$n = 1,\ 2$ のとき，(A) は成立する．

$n = k+1$ で初めて (A) が成立しない，すなわち，x_{k+1} と b が互いに素でないと仮定すると，$(*)$ より

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad x_{k+1} - bx_{k-1} = ax_k$$

整数 a と b は互いに素であるから，上の第 2 式から x_k がすでに b と互いに素でないので仮定に反し，矛盾．よって，(A) は成立する．

x_1 と x_2 は互いに素である．
$n = m$ のとき初めて x_m と x_{m+1} が互いに素でないと仮定すると $(m \geqq 2)$

$$\begin{aligned} & x_m \text{と } ax_m + bx_{m-1} \text{は互いに素でない} \\ \Longrightarrow\ & x_m \text{と } bx_{m-1} \text{は互いに素でない} \\ \text{(A) より} \quad \Longrightarrow\ & x_m \text{と } x_{m-1} \text{は互いに素でない} \end{aligned}$$

これは仮定に反し，矛盾．

よって，すべての自然数 n について，x_n と x_{n+1} は互いに素である．

補足　(B)　$\{x_n\}$ は整数 a と互いに素である．

条件から，$n = 1,\ 2$ のとき，(B) は成立する．

$n = k+1$ で初めて (B) が成立しない，すなわち，x_{k+1} と a が互いに素でないと仮定すると，$(*)$ より

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1} \quad \text{ゆえに} \quad x_{k+1} - ax_k = bx_{k-1}$$

整数 a と b は互いに素であるから，上の第 2 式から x_{k-1} がすでに b と互いに素でないので仮定に反し，矛盾．よって，(B) は成立する． ■