

平成15年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 必答, 4 5 から1題選択

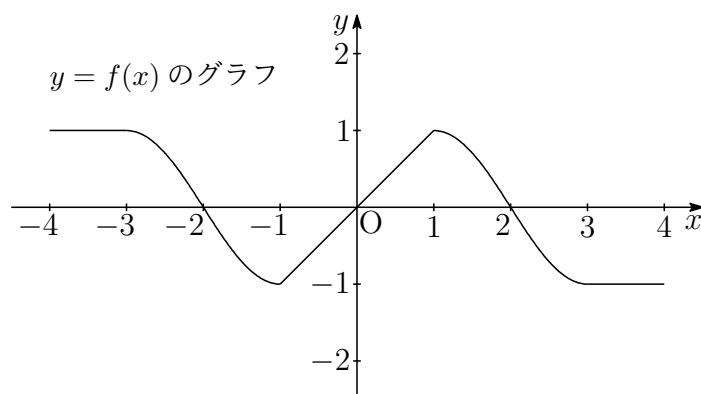
- 1 2次方程式 $x^2 - px - q = 0$ は実数解 α, β を持つものとする. 座標平面上の点列 $\{P_n(a_n, b_n)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める. $(a_0, b_0) = (0, 0)$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2 + q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) P_2, P_3 の座標を α のみを用いて表せ.
 - (2) P_n の座標を α のみを用いて表せ.
 - (3) $n \rightarrow \infty$ のとき, $P_n(a_n, b_n)$ がある点 $P(a, b)$ に収束するための必要十分条件を α に関する条件として与え, その点 $P(a, b)$ を求めよ.
- 2 O を原点とする座標平面上の, 半径1の円周 $A: x^2 + y^2 = 1$ と直線 $\ell: y = d$ ($0 < d < 1$) との交点を P, Q とする. 円周 A 上の点 $R(x, y)$ は $y > d$ の範囲を動く. 線分 OR と線分 PQ の交点を S, 点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき, 線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ.
- 3 サイコロを n 回投げて, 3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする. 各 n について, $P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする. ただし, このような k が複数あるときは, 最も大きいものを $N(n)$ とする.

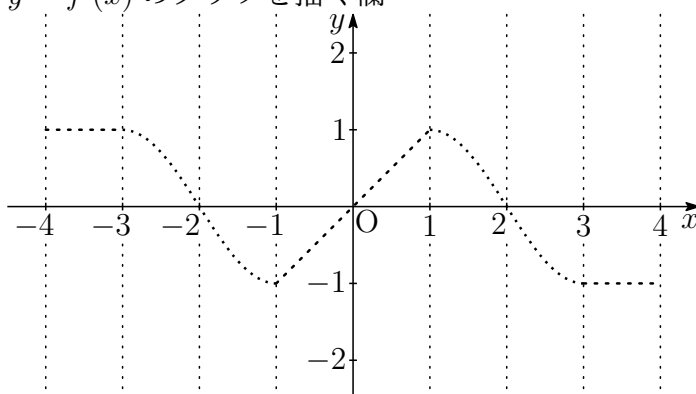
- (1) $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ.
 - (2) $n \geq 2$ のとき, $\frac{N(n)}{n}$ を最小にする n と, そのときの $\frac{N(n)}{n}$ の値を求めよ.
 - (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n}$ を求めよ.
- 4 (1) 平行四辺形 ABCD において, $AB = CD = a, BC = AD = b, AC = d$ とする. このとき, $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$ が成り立つことを証明せよ.
- (2) 3つの正数 a, b, c ($0 < a \leq b \leq c$) が $a^2 + b^2 > c^2$ を満たすとき, 各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体を作れることを証明せよ.

- 5 各点で微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフが下図で与えられている。このとき、 $y = f'(x)$ と $y = \int_0^x f(t) dt$ のグラフの概形を描け。また、そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。



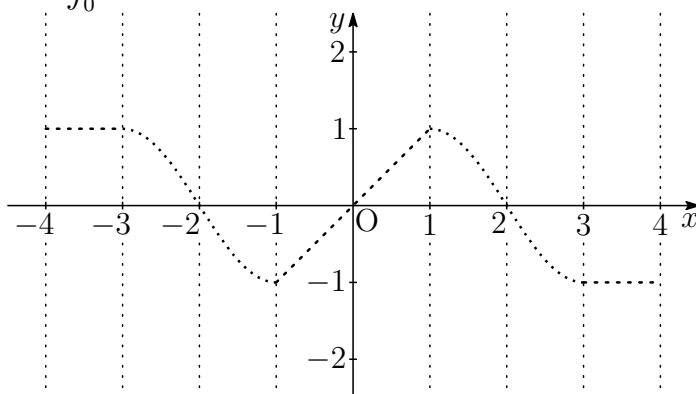
(解答欄)

- (1) $y = f'(x)$ のグラフを描く欄



上のようなグラフを描いたポイントとその説明

- (2) $y = \int_0^x f(t) dt$ のグラフを描く欄



上のようなグラフを描いたポイントとその説明

解答例

- 1** (1) 2 次方程式 $x^2 - px - q = 0$ の解 α, β と係数の関係により

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q$$

$$A = \begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2 + q \end{pmatrix} \text{ とおいて, } p = \alpha + \beta, \quad q = -\alpha\beta \text{ を代入すると}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha + \beta \\ -\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha + \beta \\ -\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - a_0 \\ b_1 - b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ であるから, } (*) \text{ より, } n \geq 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} - a_n \\ b_{n+1} - b_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_n - a_{n-1} \\ b_n - b_{n-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 - a_0 \\ b_1 - b_0 \end{pmatrix} \\ &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha^{2n} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} a_{k+1} - a_k \\ b_{k+1} - b_k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

よって

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k}, \quad b_n = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (**)$$

(**) に $n = 2, 3$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \alpha^2, & b_2 &= \alpha(1 + \alpha^2), \\ a_3 &= 1 + \alpha^2 + \alpha^4, & b_3 &= \alpha(1 + \alpha^2 + \alpha^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \mathbf{P}_2(1 + \alpha^2, \alpha + \alpha^3) \\ & \mathbf{P}_3(1 + \alpha^2 + \alpha^4, \alpha + \alpha^3 + \alpha^5) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\mathbf{P}_0(0, 0)$

$$\mathbf{P}_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k}, \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) (**) より, $\mathbf{P}_n(a_n, b_n)$ が点 $\mathbf{P}(a, b)$ に収束するための必要十分条件は

$$|\alpha| < 1 \quad \text{すなわち} \quad -1 < \alpha < 1$$

$$\text{このとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{1 - \alpha^2}, \quad b = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{P} \left(\frac{1}{1 - \alpha^2}, \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \right)$$



- 2** y 軸に関する対称性により, 点 R は次式を満たす第 1 象限の点 (x, y) としても一般性を失わない.

$$(*) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x > 0, \quad d < y < 1$$

点 S の x 座標を s とすると

$$\frac{d}{s} = \frac{y}{x} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{dx}{y}$$

$$f(x) = ST \quad \text{とおくと} \quad f(x) = x - \frac{dx}{y}$$

$$(*) \text{ を } x \text{ について微分すると } 2x + 2yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

したがって, $f'(x)$ および $f''(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - d \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} y' \right) = 1 - d \left(\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3} \right) \\ &= 1 - \frac{d(x^2 + y^2)}{y^3} = 1 - \frac{d}{y^3} \\ f''(x) &= \frac{3dy'}{y^4} = -\frac{3dx}{y^5} < 0 \end{aligned}$$

したがって, $y = d^{\frac{1}{3}}, x = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - d^{\frac{2}{3}}}$ で, $f(x)$ は極大 (最大) となる.

これらを $f(x) = x \left(1 - \frac{d}{y} \right)$ に代入すると, 最大値は

$$\sqrt{1 - d^{\frac{2}{3}}} \left(1 - d^{\frac{2}{3}} \right) = (1 - d^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

■

- 3** (1) $P_n(k) = {}_nC_k \left(\frac{1}{3} \right)^k \left(\frac{2}{3} \right)^{n-k} = \frac{n!2^{n-k}}{k!(n-k)!3^n}$ より

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n!2^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!3^n} \times \frac{k!(n-k)!3^n}{n!2^{n-k}} = \frac{n-k}{2(k+1)}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} - 1 = \frac{n-k}{2(k+1)} - 1 = \frac{n-2-3k}{2(k+1)} = \frac{3}{2(k+1)} \left(\frac{n-2}{3} - k \right)$$

$$k \leq \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor \text{ のとき } P_n(k+1) \geq P_n(k)$$

$$\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \leq k \text{ のとき } P_n(k) > P(k+1)$$

$$\text{したがって } N(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$$

$n \geq 2$ より, $N(n) \geq 1$ であるから, $N(n) = k$ ($k \geq 1$) となる n は

$$n = 3k - 1, 3k, 3k + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{k}{3k+1} \leq \frac{N(n)}{n} \leq \frac{k}{3k-1} \quad (*)$$

$$\text{このとき} \quad \frac{k}{3k+1} - \frac{1}{4} = \frac{k-1}{4(3k+1)} \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{N(n)}{n} \geq \frac{k}{3k+1} \geq \frac{1}{4}$$

したがって, $\frac{N(n)}{n}$ を最小にする n の値は, $n = 3k + 1$, $k - 1 = 0$ より

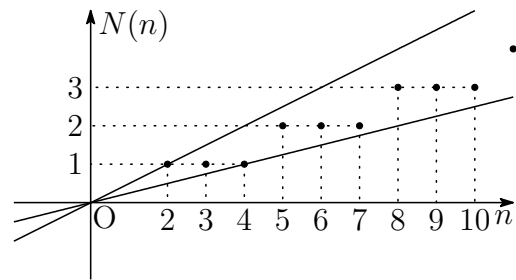
$$n = 4 \text{ のとき } \frac{N(n)}{n} = \frac{1}{4}$$

補足 $\frac{1}{4} \leq \frac{k}{3k+1} \leq \frac{N(n)}{n} \leq \frac{k}{3k-1} \leq \frac{1}{2}$ が成立する. $\frac{N(n)}{n}$ の最大値は

$$n = 3k - 1, k = 1 \quad \text{すなわち} \quad n = 2 \text{ のとき, 最大値 } \frac{1}{2}$$

$\frac{N(n)}{n}$ は原点 O と点 $(n, N(n))$ を結ぶ直線の傾きを表す.
 $n \geq 2$ の整数について

$$\frac{1}{4} \leq \frac{N(n)}{n} \leq \frac{1}{2}$$



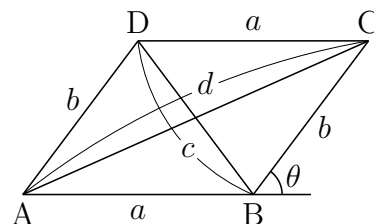
(3) $n \rightarrow \infty$ のとき, $k \rightarrow \infty$. (*) にはさみうちの原理を適用すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n} = \frac{1}{3}$$



- 4 (1) $\theta = \angle DAB$ において, $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta, \\ d^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \theta) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta \end{aligned}$$



上の2式の辺々を加えると

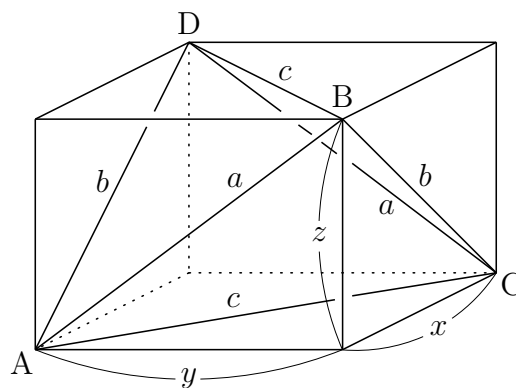
$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$$

- (2) $0 < a \leq b \leq c$ が

$$a^2 + b^2 > c^2$$

をみたすとき

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - a^2 &> 0, \\ c^2 + a^2 - b^2 &> 0, \\ a^2 + b^2 - c^2 &> 0 \end{aligned}$$



であるから

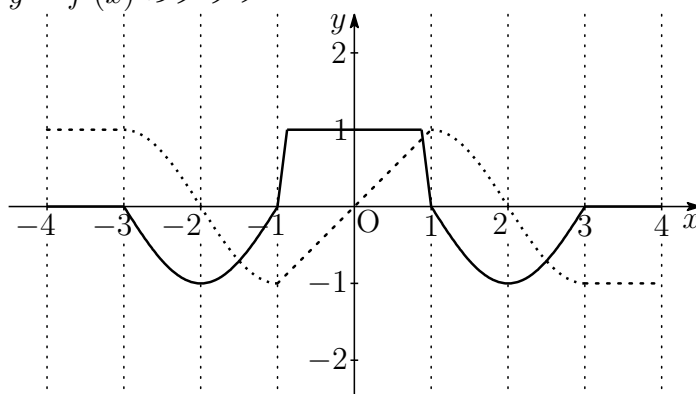
$$2x^2 = b^2 + c^2 - a^2, \quad 2y^2 = c^2 + a^2 - b^2, \quad 2z^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

とおくと, 直方体の縦, 横, 高さがそれぞれ x, y, z で

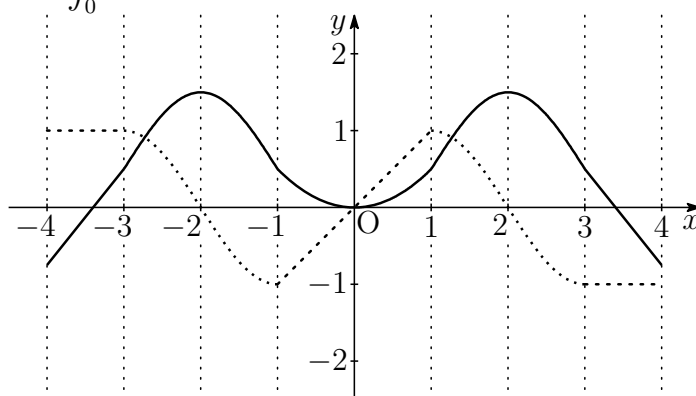
$$y^2 + z^2 = a^2, \quad z^2 + x^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = c^2$$

を満たすものが唯一存在する. この直方体に埋め込まれる四面体が条件を満たす四面体 (等面四面体) である. ■

5 $y = f'(x)$ のグラフ



$y = \int_0^x f(t) dt$ のグラフ



補足 $-1 \leq x \leq 1$ の区間を $f(x) = x$ とみると

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f'(x) = 1,$$

となり, グラフから判断する $f'(1) = 0$, $f'(-1) = 0$ に反する. したがって, $x = \pm 1$ の前後で曲線になる. $x = \pm 3$ の前後で曲線と直線で接続されていても

$$f'(3) = 0, \quad f'(-3) = 0$$

であり, $x = \pm 3$ で微分可能である.

例えば, n を 0 以上の整数とし, 次の関数を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^{n+1} & (x > 0) \end{cases}$$

$f(x)$ は, $x = 0$ で連続であるが, $n = 0$ のとき, $x = 0$ で微分可能ではない.

$n \geq 1$ のとき, $x = 0$ で微分可能で, $f(x)$ は正則である.

$f(x)$ は n 回微分可能で, $f(x)$ を C^n 級といい, $f(x)$ が何回も微分可能であるとき, $f(x)$ を C^∞ 級という. ■