平成 14 年度　名古屋大学　2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報)　数 I・II・III・A・B・C

問題 [1] [2] [3] 必答，[4] [5] から 1 題選択

1 (1) x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ．

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ．

2 a, b を正数とし，xy 平面で不等式

$$\frac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1$$

の表す領域 D と，不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ の表す領域 E を考える．

(1) $a=2$，$b=1$ の場合に，領域 D を図示せよ．

(2) D が E に含まれるための a，b の条件を求め，ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ．

3 $f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で $0<f(x)<1$ を満たすものとする．$a_1=1$ とし，順に，

$$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx \quad (m=2,3,4,\cdots)$$

により数列 $\{a_m\}$ を定める．

(1) $m\geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ $a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$ となることを示せ．

(2) $\dfrac{1}{2002}>a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ．

4 関係式

$$x^a = y^b = z^c = xyz$$

を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする．

5 次の問いに答えよ．ただし，偏角 θ は，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるものとする．

(1) $|z+i| = |z-i|$ を満たす複素数 z は，実数に限ることを示せ．

(2) 複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数 $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ の動く範囲を求めよ．

(3) z を未知数とする方程式 $(z+i)^9 = (z-i)^9$ のすべての解 z について $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ を求めよ．

解答例

1 (1) $x>0$ に対して

$$\int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x+1}\right)dt=\left[\ \log t-\frac{t}{x+1}\ \right]_x^{x+1}$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

よって $\quad \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2) $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\left\{\log(x+1)-\log x\right\}$ とおくと $(x>0)$

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

$f(x)$ は単調増加関数であるから，$a=\dfrac{2002}{2001}$ とおくと，$\dfrac{1}{a}<a$ より

$$f\left(\frac{1}{a}\right)<f(a)\quad \text{ゆえに}\quad \log(1+a)^{\frac{1}{a}}<\log\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$$

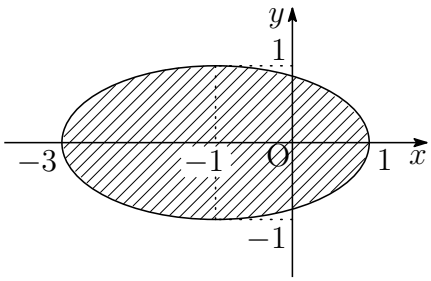
したがって $\quad (1+a)^{\frac{1}{a}}<\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^a$

すなわち $\quad \boldsymbol{\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}}$ ■

2 (1) $a=2$，$b=1$ のとき

$$D:\frac{(x+1)^2}{4}+y^2\leqq 1$$

D の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．



(2) 領域　　$D:\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$

の境界線の方程式を θ を媒介変数として

$$\begin{cases} x=1-a+a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} \qquad (0\leqq\theta<2\pi)$$

と表せる．これがつねに $E:x^2+y^2\leqq 1$ を満たすから

$$(1-a+a\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2\leqq 1$$

$t=\cos\theta$ とおくと，$-1\leqq t\leqq 1$ より

$$\begin{aligned} \{1+a(t-1)\}^2+b^2(1-t^2)-1&\leqq 0 \\ 2a(t-1)+a^2(t-1)^2-b^2(t+1)(t-1)&\leqq 0 \\ (t-1)\{(a^2-b^2)t-a^2-b^2+2a)\}&\leqq 0 \end{aligned}$$

$f(t)=(a^2-b^2)t-a^2-b^2+2a$ とおくと，上式は $t=1$ のときは成立するから，$-1\leqq t<1$ のとき，$f(t)\geqq 0$ を満たせばよい．$f(t)$ のグラフは直線であるから

$$f(-1)\geqq 0,\quad f(1)\geqq 0$$

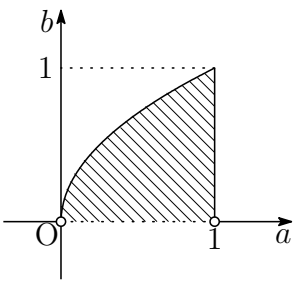
を満たせばよいから

$$-2a^2+2a\geqq 0,\quad -2b^2+2a\leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0\leqq a\leqq 1,\ \ a\geqq b^2$$

条件より，$a>0$, $b>0$ であるから

$$0<a\leqq 1,\ \ b>0,\ \ a\geqq b^2$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で a 軸上以外の境界線を含む．



補足 仮に $f(1)<0$ ならば，$f(t)$ は連続関数であるから，$f(1-\varepsilon)<0$ となる $\varepsilon>0$ が存在し，$f(t)\geqq 0$ $(-1\leqq t<1)$ に反する． ■

3 (1) $0 < f(x) < 1$, $a_1 = 1$, $a_m = \displaystyle\int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx \quad \cdots (*)$

$$a_m > 0 \quad (m = 2, 3, 4, \cdots) \tag{A}$$

［1］$m = 1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$m = k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$(*)$ より

$$a_{k+1} = \int_0^{a_k} f(x)\,dx > 0$$

よって，$m = k + 1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，$m \geqq 2$ のとき (A) は成立する．

$(*)$ より $\quad a_{m-1} - a_m = \displaystyle\int_0^{a_{m-1}} \{1 - f(x)\}\,dx > 0 \quad$ ゆえに $\quad a_{m-1} > a_m$

(2) $M_{m-1} = \displaystyle\max_{0 \leqq x \leqq a_{m-1}} f(x)$ とおくと $\quad 0 < M_{m-1} < 1$

$$a_m = \int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx \leqq \int_0^{a_{m-1}} M_{m-1} = M_{m-1} a_{m-1}$$

$a_{m-1} > 0$ であるから $\quad \dfrac{a_m}{a_{m-1}} \leqq M_{m-1}$

$$a_m = \prod_{k=2}^{m} \frac{a_k}{a_{k-1}} \leqq \prod_{k=2}^{m} M_{k-1} \quad (m \geqq 2)$$

$M = \displaystyle\max_{2 \leqq k \leqq m} M_{k-1}$ とすると $\quad 0 < M < 1$

$$a_m \leqq M^{m-1} \tag{$*$}$$

$\dfrac{1}{2002} > a_m$ となる m が存在せず，すべての自然数 m について

$$\frac{1}{2002} \leqq a_m \tag{B}$$

であると仮定する．$0 < M < 1$ より

$$M^{N-1} < \frac{1}{2002}$$

である自然数 N が存在し，上式および $(*)$ より，$m \geqq N$ について

$$a_m \leqq M^{N-1} < \frac{1}{2002}$$

仮定 (B) はこれに反する．よって，$\dfrac{1}{2020} > a_m$ となる m が存在する．

補足 $0 < a_m \leqq M^{m-1}$ であるから $(0 < M < 1) \quad \displaystyle\lim_{m \to \infty} a_m = 0$ ■

4 $x^a = y^b = z^c = xyz$ より ($a,\ b,\ c$ は正の整数，$a \leqq b \leqq c$)

$$x = (xyz)^{\frac{1}{a}}, \quad y = (xyz)^{\frac{1}{b}}, \quad z = (xyz)^{\frac{1}{c}}$$

上の 3 式の辺々を掛けると

$$xyz = (xyz)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1 \qquad (*)$$

$a \leqq b \leqq c$ より，$\dfrac{1}{a} \geqq \dfrac{1}{b} \geqq \dfrac{1}{c}$ であるから

$$\frac{3}{a} \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq 3$$

(i) $a = 2$ のとき，これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (b-2)(c-2) = 4$$

$c-2 \geqq b-2 \geqq a-2 = 0$ に注意して

$$\begin{cases} b-2 = 2 \\ c-2 = 2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b-2 = 1 \\ c-2 = 4 \end{cases}$$

これを解いて　　$(b,\ c) = (4,\ 4),\ (3,\ 6)$

(ii) $a = 3$ のとき，これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{2}{3} \quad \text{ゆえに} \quad (2b-3)(2c-3) = 9$$

$2c-3 \geqq 2b-3 \geqq 2a-3 = 3$ に注意して

$$\begin{cases} 2b-3 = 3 \\ 2c-3 = 3 \end{cases}$$

これを解いて　　$(b,\ c) = (3,\ 3)$

(i),(ii) より　　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (2,\ 4,\ 4),\ (2,\ 3,\ 6),\ (3,\ 3,\ 3)}$ ■

5 (1) $|z+i|=|z-i|$ より　$|z+i|^2=|z-i|^2$

$$(z+i)(\overline{z}-i)=(z-i)(\overline{z}+i)\quad \text{整理すると}\quad i(z-\overline{z})=0$$

したがって　$z=\overline{z}$　よって　z は実数

(2) z は実数であるから

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}=\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}=\sin\theta \qquad (*)$$

とおくと

$$\begin{aligned} z+i&=\sqrt{z^2+1}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{i}{\sqrt{z^2+1}}\right)\\ &=\sqrt{z^2+1}(\cos\theta+i\sin\theta)\end{aligned}$$

$(*)$ の第 2 式から，$\sin\theta>0$ より　　$\boldsymbol{0<\arg(z+i)<\pi}$

(3) $(z+i)^9=(z-i)^9$ より　$\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^9=1$

$\dfrac{z+i}{z-i}\neq 1$ であるから

$$\frac{z+i}{z-i}=w=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \theta=\frac{2k\pi}{9}\quad (k=1,2,\cdots,8)$$

とおくと

$$z+i=w(z-i)\quad \text{ゆえに}\quad z=\frac{i(w+1)}{w-1}$$

したがって

$$\begin{aligned} z+i&=\frac{i(w+1)+i(w-1)}{w-1}=\frac{2iw}{w-1}\\ &=\frac{2iw(\overline{w}-1)}{(w-1)(\overline{w}-1)}=\frac{2i(1-w)}{|w-1|^2}\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} 2i(1-w)&=2i(1-\cos\theta-i\sin\theta)\\ &=2i\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\ &=4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\arg(z+i)=\dfrac{\theta}{2}=\boldsymbol{\dfrac{k}{9}\pi}\quad \boldsymbol{(k=1,2,\cdots,8)}$

別解 $(**)$　$(z+i)^9=(z-i)^9$ より

$$|z+i|^9=|z-i|^9 \quad \text{ゆえに} \quad |z+i|=|z-i|$$

(1) の結果から，z は実数である．$(**)$ より

$$\arg(z+i)^9=\arg(z-i)^9 \quad \text{ゆえに} \quad 9\arg(z+i)=9\arg(z-i)$$

z は実数であるから

$$z-i=\frac{(z+i)(z-i)}{z+i}=\frac{|z+i|^2}{z+i}$$

上式より，$\arg(z-i)=-\arg(z+i)$ であるから

$$9\arg(z+i)=-9\arg(z+i)+2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

(2) の結果から，$0<z+i<\pi$ であるから

$$\boldsymbol{\arg(z+i)=\frac{n}{9}\pi \quad (n=1,2,\cdots,8)}$$

■