

平成13年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 必答, 4 5 から1題選択

1 e を自然対数の底とする. $e \leq p < q$ のとき, 不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ.

2 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上で定義された x の関数 $f(x) = \int_0^\pi \sin\left(|t-x| + \frac{\pi}{4}\right) dt$ の最大値および最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ.

3 $\triangle ABC$ の外心(外接円の中心) O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は

$$\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

を満たす正数であるとする. また, 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする.

(1) $\overrightarrow{OA}, \alpha, \beta, \gamma$ を用いて $\overrightarrow{OA'}$ を表せ.

(2) $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ.

4 n を3以上の自然数とする. 有限複素数列 $z_1, z_2, \dots, z_n$ の各項はいずれも方程式 $z^6 = 1$ の解の一つであり, かつ, 関係式 $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$ を満たしているとする.

(1) $z_1, z_2, \dots, z_n$ の中に1が含まれ, -1 が含まれていないとすれば, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも $z_1, z_2, \dots, z_n$ の中に含まれることを示せ.

(2) $n = 6$ のとき, (1) のような複素数列 $z_1, z_2, \dots, z_6$ のとり方の個数を求めよ.

5 数直線上の原点 O から出発して, 硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える. 毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$, 裏が出れば -1 , それぞれ駒を進めるとする. ただし, 点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする.

(1) k 回目に硬貨を投げたあと, 駒が点 1 にある確率を求めよ.

(2) k 回目に硬貨を投げたあと, 駒がある点 X_k の期待値 $E[X_k]$ を求めよ.

解答例

1 $f(x) = \log(\log x)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x \log x}$$

$e \leq p < q$ のとき, $f(x)$ は区間 $[p, q]$ で連続で区間 (p, q) で微分可能であるから, 平均値の定理により

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(c), \quad p < c < q$$

を満たす c が存在する. このとき

$$f'(c) = \frac{1}{c \log c} < \frac{1}{e \log e} = \frac{1}{e}$$

したがって
$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q - p} < \frac{1}{e}$$

よって
$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q - p}{e}$$



$$\boxed{2} \quad f(x) = \int_0^\pi \sin\left(|t-x| + \frac{\pi}{4}\right) dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

(i) $0 \leq x \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sin\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right) dt + \int_x^\pi \sin\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= \left[\cos\left(x-t+\frac{\pi}{4}\right) \right]_0^x - \left[\cos\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right) \right]_x^\pi \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5}{4}\pi - x\right) \\ &= \sqrt{2} - 2\cos\frac{3}{4}\pi \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin x \end{aligned}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$, $x = 0, \pi$ で最小値 $\sqrt{2}$

(ii) $\pi \leq x \leq 2\pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \sin\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= \left[\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right) \right]_0^\pi \\ &= \cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$x = \pi$ で最大値 $\sqrt{2}$, $x = \frac{7}{4}\pi$ で最小値 -2

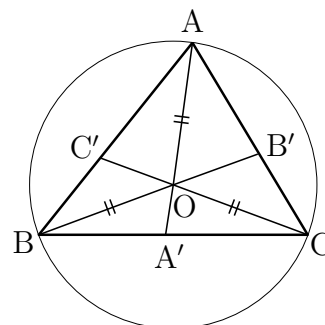
(i), (ii) より, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 $2\sqrt{2}$, $x = \frac{7}{4}\pi$ のとき 最小値 -2 ■

3 (1) $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} = \vec{0}$ より

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= -\frac{1}{\alpha}(\beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}) \\ &= -\frac{\beta + \gamma}{\alpha} \cdot \frac{\beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}}{\gamma + \beta}\end{aligned}$$

これから $\vec{OA'} = \frac{\beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}}{\gamma + \beta} \dots \textcircled{1}$

$$\vec{OA} = -\frac{\beta + \gamma}{\alpha}\vec{OA'} \quad \text{よって} \quad \vec{OA'} = -\frac{\alpha}{\beta + \gamma}\vec{OA}$$



(2) (1) の結果から，同様にして

$$\vec{OB'} = -\frac{\beta}{\gamma + \alpha}\vec{OB}, \quad \vec{OC'} = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}\vec{OC}$$

$\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致するとき

$$|\vec{OA'}| = |\vec{OB'}| = |\vec{OC'}|$$

であるから， α, β, γ は整数であることに注意して

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma}|\vec{OA}| = \frac{\beta}{\gamma + \alpha}|\vec{OB}| = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}|\vec{OC}|$$

O は $\triangle ABC$ の外心であるから， $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ より

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{\beta}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

上式の値を k とおくと

$$\alpha = k(\beta + \gamma), \quad \beta = k(\gamma + \alpha), \quad \gamma = k(\alpha + \beta) \quad (*)$$

これらの3式辺々を加えると

$$\alpha + \beta + \gamma = 2k(\alpha + \beta + \gamma) \quad \text{ゆえに} \quad (2k - 1)(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

$\alpha, \beta, \gamma > 0$ より， $k = \frac{1}{2}$. これを (*) に代入することにより

$$2\alpha = \beta + \gamma, \quad 2\beta = \gamma + \alpha, \quad 2\gamma = \alpha + \beta$$

上の第1式と第2式の辺々の差をとることにより $\alpha = \beta$

さらにこれを第3式に代入すると $\alpha = \beta = \gamma$ ■

- 4 (1) $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおく. 有限数列 $\{z_n\}$ の中に $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, 1$ がそれぞれ a, a', b, b', c 個あるとすると

$$(*) \begin{cases} a + a' + b + b' + c = n \\ a\alpha + a'\bar{\alpha} + b\beta + b'\bar{\beta} + c = 0 \end{cases}$$

(*) の第 2 式を 2 倍して整理すると

$$\begin{aligned} & (a + a')(\alpha + \bar{\alpha}) + (a - a')(\alpha - \bar{\alpha}) \\ & \quad + (b + b')(\beta + \bar{\beta}) + (b - b')(\beta - \bar{\beta}) + 2c = 0 \\ & a + a' - (b + b') + 2c + \{(a - a') + (b - b')\}\sqrt{3}i = 0 \end{aligned}$$

$a + a' - (b + b')$ および $(a - a') + (b - b')$ は実数であるから

$$a + a' - b - b' + 2c = 0, \quad a - a' + b - b' = 0$$

上の 2 式の辺々の和および差をとると

$$2a - 2b' + 2c = 0, \quad 2a' - 2b + 2c = 0$$

$c \geq 1$ であるから $b' = a + c \geq 1$, $b = a' + c \geq 1$

よって, 題意は成立する.

- (2) $n = 6$, $b' = a + c$, $b = a' + c$ を (*) の第 1 式に代入すると

$$2a + 2a' + 3c = 6$$

$c = 1$ は上式を満たさない. $c = 2$ であるから

$$a + a' = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = a' = 0, \quad b = b' = 2$$

よって, 求める個数は $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ (個) ■

5 (1) k 回目に硬貨を投げたあと、駒が点 1 にある確率を $p_k(1)$ とする.

(i) k が偶数のとき, $p_k(1) = 0$

(ii) k が奇数のとき, $p_1(1) = \frac{1}{2}$

$$p_{k+2}(1) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) p_k(1) = \frac{1}{2} p_k(1)$$

$$\text{したがって } p_k(1) = p_1(1) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{k-1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

(2) k 回目に硬貨を投げたあと、駒が点 x にある確率を $p_k(x)$ とすると

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= -1 \cdot p_{k+1}(-1) + 0 \cdot p_{k+1}(0) + 1 \cdot p_{k+1}(1) \\ &\quad + 2 \cdot p_{k+1}(2) + 3 \cdot p_{k+1}(3) \end{aligned}$$

これに漸化式

$$p_{k+1}(-1) = p_k(-1) + \frac{1}{2} p_k(0),$$

$$p_{k+1}(0) = \frac{1}{2} p_k(1),$$

$$p_{k+1}(1) = \frac{1}{2} p_k(0) + \frac{1}{2} p_k(2),$$

$$p_{k+1}(2) = \frac{1}{2} p_k(1),$$

$$p_{k+1}(3) = \frac{1}{2} p_k(2) + p_k(3)$$

を代入して整理すると

$$E(X_{k+1}) = -p_k(-1) + p_k(1) + 2p_k(2) + 3p_k(3) = E(X_k)$$

$$\text{また } E(X_1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 \quad \text{よって } E(X_k) = 0$$

補足 破産問題 (Ruin problem) に関する出題. $X = -1, 3$ が吸収壁¹. ■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou-jou-2014.pdf> (p.13)