令和7年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報)
数 I・II・A・B・C

問題 1 2 3

1 実数 b, c に対し，放物線 $y=f(x)=x^2+bx+c$ が2点 $(p,\ 0)$, $(q,\ 0)$ を通ると仮定する (ただし $p<q$)．また，条件 $0<t\leqq 1$ を満たす実数 t に対し実数 r, s を次のように定める．

$$r=\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q, \quad s=\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q$$

以下の問に答えよ．

(1) $q-s$, $r-p$, $s+r$, $s-r$ のそれぞれを b, c, t を用いて表せ．

(2) sr および s^2+r^2 を b, c, t を用いて表せ．

(3) 放物線 $y=f(x)$, 直線 $x=r$, $x=s$, および x 軸が囲む領域の面積を b, c, t を用いて表せ．

2 整数 a, b, c に対し次の条件を考える．

$$(*)\quad a\geqq b\geqq 0 \ \text{かつ}\ a^2-b^2=c$$

以下の問に答えよ．

(1) $c=24,\ 25,\ 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(2) p は3以上の素数，n は正の整数，$c=4p^{2n}$ とする．このとき，条件 $(*)$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

3 コイン ①, ⋯ , ⑥ が下図のようにマス目の中に置かれている．

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える．例えば，① を選べば，②，④ を裏返し，② を選べば，①，③，⑤ を裏返す．最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする．正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問に答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) コイン ①, ⋯ , ⑥ をグループ A，B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる．

> n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる．

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ．

(3) p_4 を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^2+bx+c=0$ の実数解が $p,\ q$ であるから $(p<q)$

$$p=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2},\quad q=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

上の 2 式から　　$p+q=-b,\ q-p=\sqrt{b^2-4c}$

$$r=\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q=\frac{1}{2}(p+q)-\frac{t}{2}(q-p)=\frac{-b-t\sqrt{b^2-4c}}{2}$$
$$s=\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q=\frac{1}{2}(p+q)+\frac{t}{2}(q-p)=\frac{-b+t\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

したがって

$$q-s=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}-\frac{-b+t\sqrt{b^2-4c}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1-t)\sqrt{b^2-4c}}$$
$$r-p=\frac{-b-t\sqrt{b^2-4c}}{2}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1-t)\sqrt{b^2-4c}}$$
$$s+r=\frac{-b+t\sqrt{b^2-4c}}{2}+\frac{-b-t\sqrt{b^2-4c}}{2}=\boldsymbol{-b}$$
$$s-r=\frac{-b+t\sqrt{b^2-4c}}{2}-\frac{-b-t\sqrt{b^2-4c}}{2}=\boldsymbol{t\sqrt{b^2-4c}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} sr &= \frac{-b+t\sqrt{b^2-4c}}{2}\cdot\frac{-b-t\sqrt{b^2-4c}}{2} \\ &= \frac{b^2-t^2(b^2-4c)}{4}=\boldsymbol{\frac{(1-t^2)b^2+4t^2c}{4}} \\ s^2+r^2 &= \frac{1}{2}\{(s+r)^2+(s-r)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{b^2+t^2(b^2-4c)\}=\boldsymbol{\frac{(1+t^2)b^2-4t^2c}{2}} \end{aligned}$$

(3) 曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=r$，$x=s$ との交点をそれぞれ R，S とすると，(1) の結果から，R と S は放物線 $y=f(x)$ の軸に関して対称である．

$$\begin{aligned} f(s) &= (s-p)(s-q) = -(s-p)(q-s) \\ &= -\left\{\frac{-b+t\sqrt{b^2-4c}}{2} - \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right\}\cdot\frac{1}{2}(1-t)\sqrt{b^2-4c} \\ &= -\frac{1}{2}(1+t)\sqrt{b^2-4c}\cdot\frac{1}{2}(1-t)\sqrt{b^2-4c} \\ &= -\frac{1}{4}(1-t^2)(b^2-4c) \end{aligned}$$

直線 RS，$x=r$，$x=s$ および x 軸で囲まれた四角形の面積を S_1 とすると

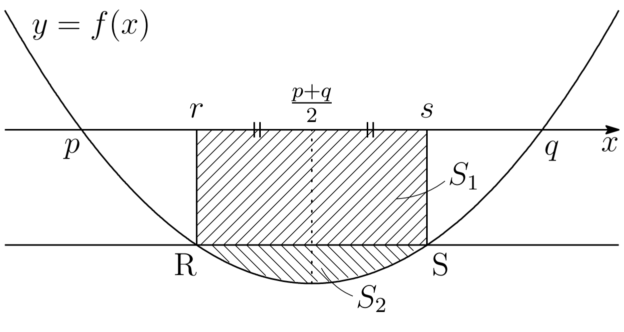
$$\begin{aligned} S_1 &= |f(s)|(s-r) = \frac{1}{4}(1-t^2)(b^2-4c)\cdot t\sqrt{b^2-4c} \\ &= \frac{1}{4}t(1-t^2)(b^2-4c)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

曲線 $y=f(x)$ および直線 RS で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6}(s-r)^3 = \frac{1}{6}(t\sqrt{b^2-4c})^3 = \frac{1}{6}t^3(b^2-4c)^{\frac{3}{2}}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2 = \frac{1}{4}t(1-t^2)(b^2-4c)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}t^3(b^2-4c)^{\frac{3}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}t(3-t^2)(b^2-4c)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$



■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $(a+b)-(a-b)=2b$ ($a,\ b$ は整数)

したがって，$a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致する

- $\underline{c=24\text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=24$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}=6$$

$a \geqq b \geqq 0$ より $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}\right)=(6,\ 1),\ (3,\ 2)$

これを解いて　$\boldsymbol{(a,\ b)=(7,\ 5),\ (5,\ 1)}$

- $\underline{c=25\text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=25$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに奇数であるから，$a \geqq b \geqq 0$ より

$$(a+b,\ a-b)=(25,\ 1),\ (5,\ 5)$$

これを解いて　$\boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 12),\ (5,\ 0)}$

- $\underline{c=26\text{ のとき}}$

$$(a+b)(a-b)=26$$

このとき，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}=\frac{13}{2}$$

$\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}$ はともに整数であるから，上式を満たさない.

よって，**条件を満たす $\boldsymbol{(a,\ b)}$ の組は存在しない.**

(2) $(a+b)(a-b)=4p^{2n}$ より，$a+b,\ a-b$ はともに偶数であるから $(a \geqq b \geqq 0)$

$\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a-b}{2}=p^{2n}$　ゆえに　$\dfrac{a+b}{2}=p^{2n-k},\ \dfrac{a-b}{2}=p^k$　$(k=0,1,\cdots,n)$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(p^{2n-k}+p^k,\ p^{2n-k}-p^k)\quad(k=0,1,2,\cdots,n)}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 回の操作終了時点ですべてのコインが裏向きになるのは，②と⑤が 1 回ずつ選ばれる場合であるから

$$p_2 = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(2) n 回の操作終了時点で，コイン ⓚ が選ばれた回数を N_k とすると，①〜⑥のコインが裏返った回数は，すべて奇数回であるから $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$，法 2 に関して

$$(*) \begin{cases} \text{コイン①が裏返った回数は} & N_2 + N_4 \equiv 1 \\ \text{コイン②が裏返った回数は} & N_1 + (N_3 + N_5) \equiv 1 \\ \text{コイン③が裏返った回数は} & N_2 + N_6 \equiv 1 \\ \text{コイン④が裏返った回数は} & N_1 + N_5 \equiv 1 \\ \text{コイン⑤が裏返った回数は} & (N_2 + N_4) + N_6 \equiv 1 \\ \text{コイン⑥が裏返った回数は} & N_3 + N_5 \equiv 1 \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式と第 6 式より $N_1 \equiv 0$,　$(*)$ の第 1 式と第 5 式より $N_6 \equiv 0$
$N_1 \equiv 0$ と $(*)$ の第 4 式より $N_5 \equiv 1$，$N_6 \equiv 0$ と $(*)$ の第 3 式より $N_2 \equiv 1$，
$N_5 \equiv 1$ と $(*)$ の第 6 式より $N_3 \equiv 0$，$N_2 \equiv 1$ と $(*)$ の第 1 式より $N_4 \equiv 0$
以上から　$N_2 \equiv N_5 \equiv 1$，$N_1 \equiv N_3 \equiv N_4 \equiv N_6 \equiv 0$
よって　$A = \{$**②**, **⑤**$\}$，$B = \{$**①**, **③**, **④**, **⑥**$\}$

(3) (2) の結果から，4 回の操作終了時点で，すべてのコインが裏向きであるのは，次の場合である．ここで $p = \dfrac{1}{6}$ とおく．

(i) $N_2 = 3$，$N_5 = 1$ のとき　$\dfrac{4!}{3!1!}p^4 = 4p^4$

(ii) $N_2 = 1$，$N_5 = 3$ のとき　$\dfrac{4!}{1!3!}p^4 = 4p^4$

(iii) $N_2 = 1$，$N_5 = 1$，$N_j = 2$ のとき $(j = 1, 3, 4, 6)$

$$\frac{4!}{1!1!2!}p^4 \times 4 = 48p^4$$

(i)〜(iii) より　$4p^4 + 4p^4 + 48p^4 = 56p^4 = 56\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \mathbf{\dfrac{7}{162}}$ ■