令和６年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $x^3-3x^2-50=0$ の実数解を求めよ．

(2) 実数 p，q が $p+q=pq$ を満たすとする．$X=pq$ とおくとき，p^3+q^3 を X で表せ．

(3) 条件

$$p^3+q^3=50,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad p<q$$

を満たす 0 でない実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

2 t を 0 でない実数として，x の関数 $y=-x^2+tx+t$ のグラフを C とする．

(1) C 上において y 座標が最大となる点 P の座標を求めよ．

(2) P と点 O$(0,\ 0)$ を通る直線を ℓ とする．ℓ と C が P 以外の共有点 Q を持つために t が満たすべき条件を求めよ．また，そのとき，点 Q の座標を求めよ．

(3) t は (2) の条件を満たすとする．A$(-1,-2)$ として，$X=\dfrac{1}{4}t^2+t$ とおくとき，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2$ を X で表せ．また，$\mathrm{AP}<\mathrm{AQ}$ となるために t が満たすべき条件を求めよ．

3 n を自然数とする．表と裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを n 回投げ，以下のように得点を決める．

- 最初に数直線上の原点に石を置き，コインを投げて表なら 2，裏なら 3 だけ数直線上を正方向に石を移動させる．コインを k 回投げた後の石の位置を a_k とする．
- $a_n \neq 2n+2$ の場合は得点を 0，$a_n = 2n+2$ の場合は得点を $a_1+a_2+\cdots+a_n$ とする．

たとえば，$n=3$ のとき，投げたコインが 3 回とも表のときは得点は 0，投げたコインが順に裏，裏，表のときは得点は $3+6+8=17$ である．

(1) n 回のうち裏の出る回数を r とするとき，a_n を求めよ．

(2) $n=4$ とする．得点が 0 でない確率および 25 である確率をそれぞれ求めよ．

(3) $n=9$ とする．得点が 100 である確率および奇数である確率をそれぞれ求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^3-3x^2-50=(x-5)(x^2+2x+10)$

3 次方程式 $x^3-3x^2-50=0$ の解は　$x=5,\ -1\pm 3i$

よって，求める実数解は　$\boldsymbol{x=5}$

(2) $X=pq=p+q$ より

$$\begin{aligned} p^3+q^3 &= (p+q)^3-3pq(p+q) \\ &= X^3-3X\cdot X = \boldsymbol{X^3-3X^2} \end{aligned}$$

(3) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より　$p+q=pq$

$X=pq=p+q$ とおくと，$p^3+q^3=50$ より，(2) の結果を利用すると

$$X^3-3X^2=50 \quad \text{ゆえに} \quad X^3-3X^2-50=0$$

X は実数であるから，(1) の結果より　$X=pq=p+q=5$

したがって，$p,\ q$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2-5t+5=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

$p<q$ より　$\boldsymbol{p=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\quad q=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C : y = -x^2 + tx + t$ より　$y = -\left(x - \dfrac{t}{2}\right)^2 + \dfrac{t^2}{4} + t$

よって，点 P の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4} + t\right)}$

(2) 2 点 O$(0,\ 0)$，P$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4} + t\right)$ を通る直線 ℓ の方程式は $(t \neq 0)$

$$y = \frac{\frac{t^2}{4} + t}{\frac{t}{2}}x \quad \text{すなわち} \quad y = \left(\frac{t}{2} + 2\right)x$$

ℓ と C の方程式から y を消去すると

$$\left(\frac{t}{2} + 2\right)x = -x^2 + tx + t \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)\left(x - \frac{t}{2}\right) = 0$$

これを解いて　$x = -2,\ \dfrac{t}{2}$　このとき　$\dfrac{t}{2} \neq -2$ に注意して　$t \neq -4$

$x = -2$ を ℓ の方程式に代入して　$\mathrm{Q}\boldsymbol{(-2, -t-4)}$　$\boldsymbol{(t \neq 0, -4)}$

(3) A$(-1, -2)$，P$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4} + t\right)$，Q$(-2, -t-4)$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2 &= \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - \left\{(-2+1)^2 - (-t-2)^2\right\} \\
&= \left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - 1 - 4\left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{t^2}{4} + t + 2\right)^2 - 3\left(\frac{t}{2} + 1\right)^2 - 1
\end{aligned}$$

ここで，$X = \dfrac{t^2}{4} + t$，$\left(\dfrac{t}{2} + 1\right)^2 = X + 1$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2 &= (X+2)^2 - 3(X+1) - 1 \\
&= X^2 + X = \boldsymbol{X(X+1)}
\end{aligned}$$

AP $<$ AQ より，$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AQ}^2 < 0$ であるから　$-1 < X < 0$

$$-1 < \frac{t^2}{4} + t < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)^2 > 0 \ \text{かつ}\ t(t+4) < 0$$

よって　$\boldsymbol{-4 < t < 0,\ \ t \neq -2}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 裏の出る回数が r のとき，表の出る回数は $n-r$ であるから

$$a_n = 3r + 2(n-r) = \boldsymbol{2n+r}$$

(2) $a_0 = 0$, $a_k - a_{k-1} = 2 + \varepsilon_k$ (ε_kは 0 または 1) とおくと ($k = 1, 2, \cdots, n$)

$$\sum_{k=1}^{j}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{j}(2+\varepsilon_k) \quad \text{ゆえに} \quad a_j = 2j + \sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k \qquad \text{(A)}$$

($j = 0, 1, \cdots, n$)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_j &= 2\sum_{j=1}^{n}j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k \\ &= n(n+1) + \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\varepsilon_j \qquad \text{(B)}\end{aligned}$$

$j = 4$ を (A) に代入すると，$a_4 = 8 + \sum_{k=1}^{4}\varepsilon_k$

$n = 4$ のとき　得点が 0 でないのは，$a_4 = 2\cdot4 + 2 = 10$ であるから

$$8 + \sum_{k=1}^{4}\varepsilon_k = 10 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{4}\varepsilon_k = 2 \quad \cdots ①$$

上の第 2 式から，$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)$ の組の総数は　${}_4\mathrm{C}_2$（通り）

よって，得点が 0 でない確率は　　${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

$\sum_{j=1}^{4}a_j = 25$ のとき　　$4\cdot5 + 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 25$

したがって　　$4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 5 \quad \cdots ②$

①，② から　　$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4) = (1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1,\ 0)$

よって，求める確率は　　$2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

(3) 得点が 0 でないとき，(A) から

$$2n+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = 2n+2 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = 2 \qquad (*)$$

このときの得点は，(B) である．これに $n=9$，$\displaystyle\sum_{j=1}^{9}a_j = 100$ を適用して

$$9\varepsilon_1+8\varepsilon_2+7\varepsilon_3+6\varepsilon_4+5\varepsilon_5+4\varepsilon_6+3\varepsilon_7+2\varepsilon_8+\varepsilon_9 = 10 \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ を満たす $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_9)$ を同時に満たすのは次の 4 組.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \varepsilon_9 = 1,\ a_j = 0\ (j \neq 1,9)\\
\varepsilon_2 = \varepsilon_8 = 1,\ a_j = 0\ (j \neq 2,8)\\
\varepsilon_3 = \varepsilon_7 = 1,\ a_j = 0\ (j \neq 3,7)\\
\varepsilon_4 = \varepsilon_6 = 1,\ a_j = 0\ (j \neq 4,6)
\end{aligned}$$

よって，得点が 100 である確率は　$4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{128}}$

また，(B) は法 2 について

$$n(n+1)+\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\varepsilon_j \equiv \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_7+\varepsilon_9 \pmod 2$$

これが奇数であるとき，ε_1，ε_3，ε_5，ε_7，ε_9 の 1 つだけが 1 で他が 0，同時に ε_2，ε_4，ε_6，ε_8 の 1 つだけが 1 で他が 0 である確率であるから

$$5\times 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{128}}$$

■