令和５年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

問題 [1] [2] [3]

1 a を実数とし，2 つの関数 $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (a-2)x + 2a + 1$ と $g(x) = -x^2 + 1$ を考える．

(1) $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ．

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点が 2 個であるような a を求めよ．

(3) a は (2) の条件を満たし，さらに $f(x)$ の極大値は 1 よりも大きいとする．$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ．

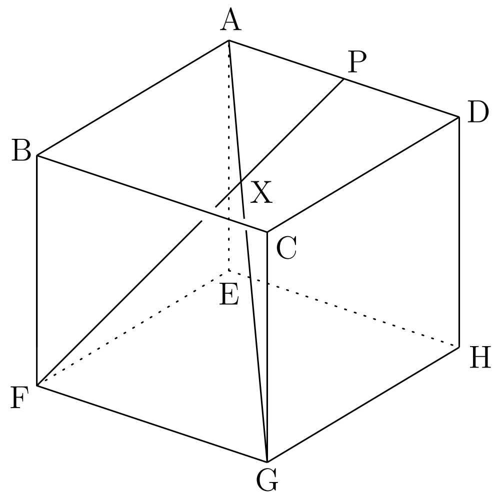
2 図のような 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 AD 上に点 P をとり，線分 AP の長さを p とする．このとき，線分 AG と線分 FP は ADGF 上で交わる．その交点を X とする．

(1) 線分 AX の長さを p を用いて表せ．

(2) 三角形 APX の面積を p を用いて表せ．

(3) 四面体 ABPX と四面体 EFGX の体積の和を V とする．V を p を用いて表せ．

(4) 点 P を辺 AD 上で動かすとき，V の最小値を求めよ．



$\boxed{3}$ 数字 1 が書かれた球が 2 個，数字 2 が書かれた球が 2 個，数字 3 が書かれた球が 2 個，数字 4 が書かれた球が 2 個，合わせて 8 個の球が袋に入っている．カードを 8 枚用意し，次の試行を 8 回行う．袋から球を 1 個取り出し，数字 k が書かれていたとき，

- 残っているカードの枚数が k 以上の場合，カードを 1 枚取り除く．
- 残っているカードの枚数が k 未満の場合，カードは取り除かない．

(1) 取り出した球を毎回袋の中に戻すとき，8 回の試行のあとでカードが 1 枚だけ残っている確率を求めよ．

(2) 取り出した球を袋の中に戻さないとき，8 回の試行のあとでカードが残っていない確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) - g(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (a-2)x + 2a + 1 - (-x^2+1)$
$$= x(x^2 - x - 2) - a(x^2 - x - 2)$$
$$= (x-a)(x^2 - x - 2)$$
$$= \boldsymbol{(x-a)(x+1)(x-2)}$$

(2) (1) の結果から　$\boldsymbol{a = -1,\ 2}$

(3) (i) $a = -1$ のとき

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f'(x) = 0$ の解を α, β とすると $(\alpha < \beta)$

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \quad (-1 < \alpha < 0), \quad \beta = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

$-1 < \alpha < 0$ について

$$f(\alpha) - g(\alpha) = (\alpha+1)^2(\alpha-2) < 0, \quad g(\alpha) < g(0) = 1$$

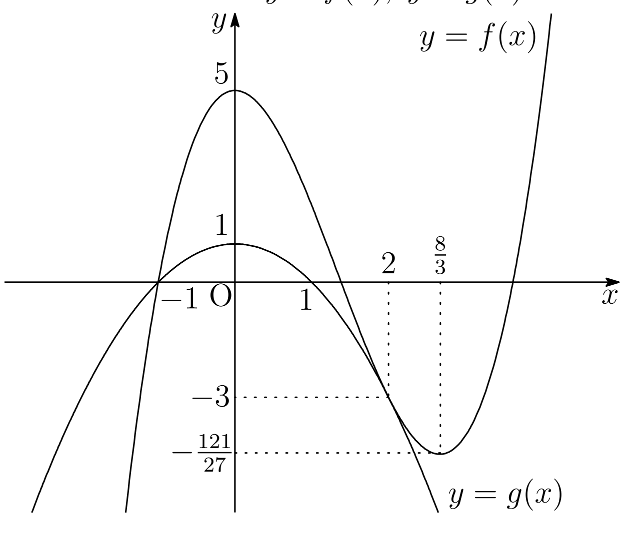
したがって　$f(\alpha) < g(\alpha) < g(0) = 1$

これは，極大値 $f(\alpha) > 1$ に反するので，不適．

(ii) $a = 2$ のとき　$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$,　$f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x-8)$

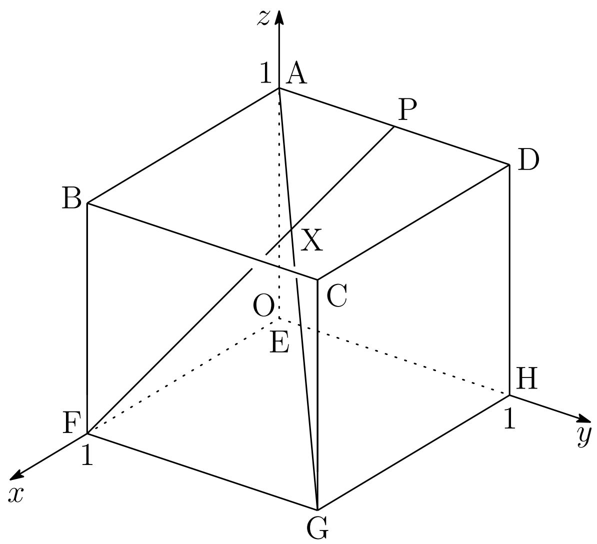
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\frac{121}{27}$	$\nearrow$

極大値 $f(0) = 5 > 1$ を満たす．$y = f(x)$, $y = g(x)$ は次のようになる．



■

2 (1) 下の図のように，座標空間の原点を O とし，点 E(0, 0, 0)，F(1, 0, 0)，H(0, 1, 0)，A(0, 0, 1)，P(0, p, 1) をとる．



FX : XP $= s : 1-s$，AX : XG $= t : 1-t$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OF}} + s\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OG}}\\ &= (1-s,\ sp,\ s) = (t,\ t,\ 1-t)\end{aligned}$$

したがって　$1-s=t,\ sp=t,\ s=1-t$　ゆえに　$s=\dfrac{1}{1+p},\ \ t=\dfrac{p}{1+p}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \left(\frac{p}{1+p},\ \frac{p}{1+p},\ \frac{1}{1+p}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0,\ 0,\ 1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{p}{1+p},\ \frac{p}{1+p}, -\frac{p}{1+p}\right)$$

よって　$\mathrm{AX} = |\overrightarrow{\mathrm{AX}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}p}{1+p}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (0,\ p,\ 0)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}})^2 = p^2\cdot\frac{3p^2}{(1+p)^2} - \left(\frac{p^2}{1+p}\right)^2 = \frac{2p^4}{(1+p)^2}$$

よって，求める三角形 APX の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p^4}{(1+p)^2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}p^2}{2(1+p)}}$$

(3) 点 X の z 座標に注目して

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABP}\cdot\left(1-\frac{1}{1+p}\right)+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{EFG}\cdot\frac{1}{1+p} \\
&= \frac{p}{6}\cdot\frac{p}{1+p}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+p}=\boldsymbol{\frac{p^2+1}{6(p+1)}}
\end{aligned}
$$

(4) (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\left(\frac{p^2-1}{p+1}+\frac{2}{p+1}\right)=\frac{1}{6}\left(p+1+\frac{2}{p+1}\right)-\frac{1}{3} \\
&\geqq \frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{(p+1)\cdot\frac{2}{p+1}}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}
\end{aligned}
$$

上式において，等号が成立するとき

$$
p+1=\frac{2}{p+1} \quad \text{すなわち} \quad p=\sqrt{2}-1
$$

確かに，$0<\sqrt{2}-1<1$ であるから，求める V の最小値は

$$
\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}
$$

■

3 (1) 5回目までは残っているカードが4枚以上あるから，カードは毎回1枚取り除かれる．8回の試行のあとでカードが1枚残るのは，次の(i)〜(iii)の場合である．

(i) 6回目だけカードを取り除かない，すなわち，6回目に数字4の球が出て，7回目に数字1〜3の球が出て，8回目に数字1または2の球が出る場合で，その確率は

$$\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{8}=\frac{3}{32}$$

(ii) 7回目だけカードを取り除かない，すなわち，6回目に数字1〜3の球が出て，7回目に数字3または4の球が出て，8回目に数字1または2の球が出る場合で，その確率は

$$\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{8}=\frac{3}{16}$$

(iii) 8回目だけカードを取り除かない，すなわち，6回目に数字1〜3の球が出て，7回目に数字1または2の球が出て，8回目に数字2〜4の球が出る場合で，その確率は

$$\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{6}{8}=\frac{9}{32}$$

(i)〜(iii)から，求める確率は $\dfrac{3}{32}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{9}{32}=\boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$

(2) 8個の球をすべて区別して順番を逆に一列に並べたとする．

8回目は数字1の球，7回目は数字1または2の球，6回目は数字1〜3の球，5回目から1回目はどの数字の球でもよいから，求める確率は

$$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5!}{8!}=\boldsymbol{\frac{1}{14}}$$

■