令和４年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 a，b を実数とする．

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x+b$ とする．b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ．

2 1 つのサイコロを 3 回投げる．1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする．

(1) $ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ．

(2) $ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ．

3 a, b を実数とし，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を C_1，放物線 $y=-(x-a)^2+b$ を C_2 とする．

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a, b の条件を求めよ．

以下，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わるとし，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする．

(2) $S=16$ となるための a, b の条件を求めよ．

(3) a, b は $b \leqq a+3$ を満たすとする．このとき S の最大値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $x^3 = (x-a)^2(x+2a) + 3a^2x - 2a^3$ より，求める余りは　$\boldsymbol{3a^2x - 2a^3}$

(2) $x^3 = (x^2 + \alpha x + \beta)(x - \alpha) + (\alpha^2 - \beta)x + \alpha\beta$

x^3 を $x^2 + \alpha x + \beta$ で割った余りが $3x + b$ であるから

$$\alpha^2 - \beta = 3, \quad \alpha\beta = b \qquad (*)$$

上の 2 式から β を消去すると　$b = \alpha^3 - 3\alpha$

$g(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha$ とすると

$$g'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3 = 3(\alpha+1)(\alpha-1)$$

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$(*)$ の第 1 式から，α の値により，一意的に β が決定するから，$f(x)$ の個数は，方程式 $b = g(\alpha)$ の解の個数と一致する．よって

$\boldsymbol{-2 < b < 2}$ **のとき　3 個**
$\boldsymbol{b = \pm 2}$ **のとき　2 個**
$\boldsymbol{b < -2,\ 2 < b}$ **のとき　1 個**

■

2 (1) $ab+2c \geqq abc$ より，$(ab-2)c \leqq ab$ であるから，$ab \leqq 2$ のとき，c は任意．

$ab \geqq 3$ のとき　　$c \leqq \dfrac{ab}{ab-2} = 1 + \dfrac{2}{ab-2}$　　$\cdots(*)$

とくに，$ab \geqq 5$ のとき　$c < 2$　ゆえに　$c = 1$

(i) $ab \leqq 2$，すなわち，$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ のとき

$$c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(ii) $ab = 3$，すなわち，$(a,\ b) = (1,\ 3),\ (3,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 3 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1,\ 2,\ 3$$

(iii) $ab = 4$，すなわち，$(a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ のとき，$(*)$ より

$$c \leqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1,\ 2$$

(iv) $ab \geqq 5$ のとき，$c = 1$ で，$(a,\ b)$ の組は，(i)〜(iii) を除いた

$$6^2 - (3+2+3) = 28 \text{ 通り}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は

$$\frac{3{\cdot}6 + 2{\cdot}3 + 3{\cdot}2 + 28{\cdot}1}{6^3} = \frac{58}{216} = \boldsymbol{\frac{29}{108}}$$

(2) まず「$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素であること」と「ab と $2c$ が互いに素であること」が同値であることを示す．

$(\Longrightarrow)$ ab と $2c$ が素数 p を因数にもつならば，$ab+2c$ および $2abc(=ab{\cdot}2c)$ は素数 p を因数にもち，$ab+2c$ と $2abc$ はともに p を因数にもつ．

$(\Longleftarrow)$ $ab+2c$ と $2abc(=ab{\cdot}2c)$ が素数 q を因数にもつならば，$ab{\cdot}2c$ が素数 q を因数にもつから，ab または $2c$ が素数 q を因数にもつ．

$$2c = (ab+2c) - ab, \quad ab = (ab+2c) - 2c$$

ab が素数 q を因数にもつとき上の第 1 式から $2c$ も q を因数にもち，$2c$ が素数 q を因数にもつとき上の第 2 式から ab も素数 q を因数にもつ．(証終)

したがって，ab と $2c$ が互いに素となる確率を求めればよい．

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき　$c=1,2,3,4,5,6$

$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4,5$

$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$ のとき　$c=1,2,3,4,6$

$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$ のとき　$c=1,2,4$

よって，求める確率は

$$\frac{1\cdot6+3\cdot4+3\cdot5+2\cdot3}{6^3}=\frac{39}{216}=\boldsymbol{\frac{13}{72}}$$

■

3 (1) $C_1: y=\frac{1}{2}x^2$ と $C_2: y=-(x-a)^2+b$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{2}x^2=-(x-a)^2+b \quad \text{整理すると} \quad 3x^2-4ax+2a^2-2b=0 \qquad (*)$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるから

$$D/4=(-2a)^2-3(2a^2-2b)=6b-2a^2>0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b>\frac{a^2}{3}}$$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha=\frac{2a-\sqrt{6b-2a^2}}{3},\quad \beta=\frac{2a+\sqrt{6b-2a^2}}{3}$$

ゆえに　$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{6b-2a^2}$　$\cdots$①

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left\{-(x-a)^2+b-\frac{1}{2}x^2\right\}dx\\&=-\frac{3}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3\end{aligned} \qquad (**)$$

$S=16$ より　$\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3=16$　ゆえに　$\beta-\alpha=4$　$\cdots$②

①，② より　$\frac{2}{3}\sqrt{6b-2a^2}=4$

$$\sqrt{6b-2a^2}=6 \quad \text{ゆえに} \quad 6b-2a^2=36 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=\frac{a^2}{3}+6}$$

(3) $b \leqq a+3$ より，$k=a+3-b$ とおくと $(k \geqq 0)$ $\qquad b=a+3-k \cdots$ ③

①，$(**)$ から，$6b-2a^2$ が最大となるとき，S は最大となる．③ より

$$\begin{aligned} 6b-2a^2 &= 6(a+3-k)-2a^2 \\ &= -2a^2+6a+18-6k \\ &= -2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{45}{2}-6k \end{aligned}$$

$k \geqq 0$ であるから，$k=0$，$a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{9}{2}$ のとき，$6b-2a^2$ は最大値 $\dfrac{45}{2}$ をとる．これを ① に代入すると

$$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{45}{2}}=\sqrt{10}$$

さらに $(**)$ に代入すると，S の最大値は $\dfrac{1}{4}(\sqrt{10})^3=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}\sqrt{10}}$ ■