令和２年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

$\boxed{1}$ a を実数として $f(x)=2x^2-2ax-a^2$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解 t が，必ず $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたすための a の条件を求めよ．

(2) (1) で求めた条件をみたす a に対して

$$S(a)=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$$

とおく．$S(a)$ の値を求めよ．

(3) $S(a)$ の値が最小となる a を求めよ．

$\boxed{2}$ (1) 平面上に $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$ をみたす相異なる 4 点 O，P，Q，R がある．このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=0$ ならば，三角形 PQR は正三角形であることを示せ．

(2) 空間内に $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=1$ をみたす相異なる 5 点 O，A，B，C，D がある．また O から A，B，C を含む平面におろした垂線の足を H とする．このとき，以下の 2 つの命題を示せ．

命題 (i) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ ならば，三角形 ABC は正三角形である．

命題 (ii) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=0$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{3}$ ならば，四面体 ABCD は正四面体である．

$\boxed{3}$ xy 平面において x，y がともに整数となる点 $(x,\ y)$ を格子点という．正の整数 n に対して

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x+y \leqq n$$

で定まる領域を D とする．4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり，x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする．また，そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ．

(2) $S(n)$ を求めよ．

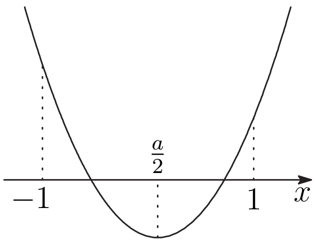
(3) $R(n)$ を求めよ．

(4) $R(n)=1001$ となる n を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = 2x^2 - 2ax - a^2$ より

$$f(x) = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3a^2}{2}$$



方程式 $f(x) = 0$ は実数解をもつ．実数解 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたす条件は

$$-1 \leqq \frac{a}{2} \leqq 1, \quad f(-1) \geqq 0, \quad f(1) \geqq 0$$

したがって　$-2 \leqq a \leqq 2, \quad 2 + 2a - a^2 \geqq 0, \quad 2 - 2a - a^2 \geqq 0$

ゆえに　$\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 2 \\ 1 - \sqrt{3} \leqq a \leqq 1 + \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} \leqq a \leqq -1 + \sqrt{3} \end{cases}$

よって　$\boldsymbol{1 - \sqrt{3} \leqq a \leqq -1 + \sqrt{3}}$

(2) $f(x) = 0$ の解を α, β とおくと $(\alpha \leqq \beta)$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2x^2 - 2ax - a^2)\,dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} 2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - ax^2 - a^2x\right]_{-1}^{1} - 4\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{4}{3} - 2a^2 + \frac{2}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

ここで，$f(x) = 0$ の解は　$x = \dfrac{a \pm \sqrt{3}|a|}{2}$　ゆえに　$\beta - \alpha = \sqrt{3}|a|$

よって　$S(a) = \dfrac{4}{3} - 2a^2 + \dfrac{2}{3}(\sqrt{3}|a|)^3 = \boldsymbol{2\sqrt{3}|a|^3 - 2a^2 + \dfrac{4}{3}}$

(3) (1),(2) の結果から

$$S(a) = 2\sqrt{3}|a|^3 - 2|a|^2 + \frac{4}{3} \quad (|a| \leqq \sqrt{3}-1)$$

$u = |a|$ とし，$g(u) = 2\sqrt{3}u^3 - 2u^2 + \dfrac{4}{3}$ とおくと $(0 \leqq u \leqq \sqrt{3}-1)$

$$g'(u) = 6\sqrt{3}u^2 - 4u = 6\sqrt{3}u\left(u - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

このとき，$\sqrt{3} - 1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{9} = \dfrac{7\sqrt{3}-9}{9} = \dfrac{\sqrt{147}-\sqrt{81}}{9} > 0$ に注意して

u	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\cdots$	$\sqrt{3}-1$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$u = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，すなわち，$\boldsymbol{a = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$ のとき，$S(a)$ は最小となる．

2 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{0}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = -\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{POQ} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{POQ} = \frac{2\pi}{3}$$

同様に　$\angle\mathrm{QOR} = \angle\mathrm{ROP} = \dfrac{2\pi}{3}$

したがって　$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = \mathrm{OR} = 1$，$\angle\mathrm{POQ} = \angle\mathrm{QOR} = \angle\mathrm{ROP} = \dfrac{2\pi}{3}$

P，Q，R は相異なる点であるから，$\triangle\mathrm{PQR}$ は正三角形である．

(2) 命題 (i)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ より　$\triangle\mathrm{OAH} \equiv \triangle\mathrm{OBH} \equiv \triangle\mathrm{OCH}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{HA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{HB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{HC}}|$　$\cdots$ ①

$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

上式を $|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ に代入すると　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$

O から平面 ABC 上の点 G までの距離が OH に等しいから　$\mathrm{G} = \mathrm{H}$

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}} + \overrightarrow{\mathrm{HC}} = \vec{0}\quad \cdots ②$$

①，② から，(1) と同様の計算により

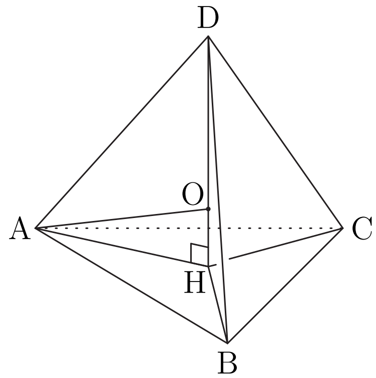
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HA}}||\overrightarrow{\mathrm{HB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HB}}||\overrightarrow{\mathrm{HC}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HC}}||\overrightarrow{\mathrm{HA}}|} = -\frac{1}{2}$$

したがって　$\angle\mathrm{AHB} = \angle\mathrm{BHC} = \angle\mathrm{CHA} = \dfrac{2\pi}{3}$　$\cdots$ ③

①，③ および A，B，C は相異なる点より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である.

命題 (ii)　条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{0}$$



H は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

上の 2 式から　$3\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{0}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = 3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = 3\cdot\dfrac{1}{3} = 1$

直角三角形 OAH において　$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OH}^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\triangle\mathrm{ABH}$ において　$\mathrm{AB} = \sqrt{3}\mathrm{AH} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であるから　$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　$\cdots$ ④

$\triangle\mathrm{ADH}$ において　$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2} = \sqrt{\dfrac{8}{9} + \dfrac{16}{9}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

これと ① より　$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　$\cdots$ ⑤

④，⑤ および A，B，C，D は相異なる点より，四面体 ABCD は正四面体.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 横の長さが a，縦の長さが b の長方形を $(a,\ b)$ 型とよぶことにする．

$n=3$ のとき，領域 D に含まれる長方形は，$(1,\ 1)$ 型が 3 個，$(2,\ 1)$ 型が 1 個，$(1,\ 2)$ 型が 1 個であるから

$$R(3) = 3+1+1 = \mathbf{5}$$

$n=4$ のとき，領域 D に含まれる長方形は，$(1,\ 1)$ 型が 6 個，$(2,\ 1)$ 型が 3 個，$(1,\ 2)$ 型が 3 個，$(2,\ 2)$ 型が 1 個，$(3,\ 1)$ 型が 1 個，$(1,\ 3)$ 型が 1 個

$$R(4) = 6+3+3+1+1+1 = \mathbf{15}$$

(2) 領域 D において，1 辺が x 軸上にある長方形の個数について

$(1,\ k)$ 型の総数は $(k=1,2,\cdots,n-1)$　$1+2+3+\cdots+(n-1)$ 個
$(2,\ k)$ 型の総数は $(k=1,2,\cdots,n-2)$　$1+2+3+\cdots+(n-2)$ 個
$\vdots$
$(n-2,\ k)$ 型の総数は $(k=1,2)$　$1+2$ 個
$(n-1,\ k)$ 型の総数は $(k=1)$　1 個

したがって

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}i(i+1) \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n-1}\{i(i+1)(i+2)-(i-1)i(i+1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} R(n) &= \sum_{k=1}^{n} S(k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) \\ &= \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

(4) $R(n)=1001$ より　$\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2) = 7\cdot 11\cdot 13$

$$(n-1)n(n+1)(n+2) = 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14$$

$n \geqq 1$ において，$R(n)$ は単調増加であるから　$\boldsymbol{n=12}$