

平成31年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 a を実数とし, 関数 $f(x) = x^2 + ax - a$ と $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ を考える. 関数 $y = F(x) - f(x)$ のグラフが x 軸と異なる3点で交わるための a の条件を求めよ.

2 非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする. P_0 の座標を $(1, 0)$ とし, P_n の座標 (x_n, y_n) と P_{n+1} の座標 (x_{n+1}, y_{n+1}) は

$$x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + k(x_n + x_{n+1})$$

をみたすとする. ただし k を正の実数とする.

(1) $k = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ とする. ただし $0 < \alpha < \pi$ とする. このとき P_1, P_2 の座標 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を α を用いて表せ.

(2) P_n の座標 (x_n, y_n) を (1) の α と n を用いて表せ.

(3) O を xy 平面の原点とすると, 三角形 P_nOP_{n+1} の面積を k を用いて表せ.

3 1つのサイコロを3回投げる. 1回目に出る目を a , 2回目に出る目を b , 3回目に出る目を c とする. なお, サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする.

(1) 2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ.

(2) 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ のすべての解が整数である確率を求めよ.

(3) 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (t^2 + at - a) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2}t^2 - at \right]_0^x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - ax$$

$g(x) = F(x) - f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - ax - (x^2 + ax - a) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a-2}{2}x^2 - 2ax + a, \\ g'(x) &= x^2 + (a-2)x - 2a = (x+a)(x-2) \end{aligned}$$

したがって、3次関数 $y = g(x)$ の極値は

$$\begin{aligned} g(-a) &= \frac{1}{3}(-a)^3 + \frac{a-2}{2} \cdot (-a)^2 - 2a \cdot (-a) + a = \frac{1}{6}a(a^2 + 6a + 6), \\ g(2) &= \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{a-2}{2} \cdot 2^2 - 2a \cdot 2 + a = -a - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$y = g(x)$ のグラフが、 x 軸と異なる3点で交わるための a の条件は、

$$g(-a)g(2) < 0$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}a(a^2 + 6a + 6) \left(-a - \frac{4}{3} \right) &< 0 \\ a \left(a + \frac{4}{3} \right) (a^2 + 6a + 6) &> 0 \\ a \left(a + \frac{4}{3} \right) (a + 3 + \sqrt{3})(a + 3 - \sqrt{3}) &> 0 \end{aligned}$$

よって、 $-3 - \sqrt{3} < -\frac{4}{3} < -3 + \sqrt{3} < 0$ に注意して

$$a < -3 - \sqrt{3}, \quad -\frac{4}{3} < a < -3 + \sqrt{3}, \quad 0 < a$$

■

2 (1) 与えられた漸化式から

$$x_{n+1} + ky_{n+1} = x_n - ky_n, \quad -kx_{n+1} + y_{n+1} = kx_n + y_n$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad x_{n+1} &= \frac{1-k^2}{1+k^2}x_n - \frac{2k}{1+k^2}y_n, \\ y_{n+1} &= \frac{2k}{1+k^2}x_n + \frac{1-k^2}{1+k^2}y_n \end{aligned}$$

$$k = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ より } \frac{1-k^2}{1+k^2} = \cos \alpha, \quad \frac{2k}{1+k^2} = \sin \alpha$$

$$\text{したがって} \quad (*) \begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos \alpha - y_n \sin \alpha \\ y_{n+1} = x_n \sin \alpha + y_n \cos \alpha \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (1, 0)$ であるから, $(*)$ より

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (\cos \alpha, \sin \alpha), \\ (x_2, y_2) &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, 2 \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{cases} x_n = \cos n\alpha, \\ y_n = \sin n\alpha \end{cases} \quad \dots (A)$$

であると推測し, これを数学的帰納法により示す.

[1] $n = 0$ のとき, (A) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (A) が成立すると仮定すると, $(*)$ より

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha = \cos(k+1)\alpha \\ y_{k+1} &= \cos k\alpha \sin \alpha + \sin k\alpha \cos \alpha = \sin(k+1)\alpha \end{aligned}$$

したがって, $n = k+1$ のときも (A) が成立する.

[1], [2] より, すべての非負の整数 n について, (A) は成立する.

よって $x_n = \cos n\alpha, y_n = \sin n\alpha$

(3) (2) の結果から, $OP_n = OP_{n+1} = 1, \angle P_n OP_{n+1} = \alpha$

$$\text{よって } \triangle P_n OP_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$$



- 3** (1) 2次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha \leq \beta$), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = b, \quad \alpha\beta = c$$

上の第1式から, 解の一方が整数であるとき, 他の解も整数である. b, c は1から6までの整数であるから, 条件を満たすのは次の7通り.

$$c = 1 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 1) \quad \text{ゆえに } b = 2$$

$$c = 2 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 2) \quad \text{ゆえに } b = 3$$

$$c = 3 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 3) \quad \text{ゆえに } b = 4$$

$$c = 4 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (2, 2), (1, 4) \quad \text{ゆえに } b = 4, 5$$

$$c = 5 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (1, 5) \quad \text{ゆえに } b = 6$$

$$c = 6 \text{ のとき } (\alpha, \beta) = (2, 3) \quad \text{ゆえに } b = 5$$

よって, 求める確率は $\frac{7}{6^2} = \frac{7}{36}$

- (2) 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$, すなわち, 2次方程式

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \dots (*)$$

のすべての解が整数であるから, 解と係数の関係により, $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ は整数で, これらは1以上6以下の整数であるから, 2次方程式(*)は, (1)で示した2次方程式

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

と一致する. すなわち, 2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ は, これらと同型 (monic) であるから, 上の第1式を2, 3倍および第2式を2倍した次の3つの2次方程式も含む.

$$2x^2 - 4x + 2 = 0, \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0, \quad 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

よって, 求める確率は $\frac{7+3}{6^3} = \frac{5}{108}$

(3) 2次方程式

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \dots (**)$$

が少なくとも1つ整数解をもつとき、 $a = 1$ の場合については(1)で調べているので、 $a \geq 2$ の場合について調べる. 2次方程式(**)の解を p, q とすると、解と係数の関係により

$$p + q = \frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

このとき、 $0 < \frac{b}{a} \leq 3$, $0 < \frac{c}{a} \leq 3$ であるから、整数解は 1 または 2

(i) 方程式(**)が1を解にもつとき $a + c = b \quad \dots \textcircled{1}$

これを満たす (a, b, c) の組は、次の10組.

a	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
b	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
c	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1

(ii) 方程式(**)が2を解にもつとき $c = 2(b - 2a) \quad \dots \textcircled{2}$

これを満たす (a, b, c) の組は、次の2組.

$$(a, b, c) = (2, 5, 2), (2, 6, 4)$$

(iii) 方程式(**)が1と2を解にもつ、すなわち、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を同時に満たす (a, b, c) は次の1組である.

$$(a, b, c) = (2, 6, 4)$$

よって、求める確率は(1)および(i)~(iii)により

$$\frac{7 + 10 + 2 - 1}{6^3} = \frac{1}{12}$$

補足 整数を係数とする2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が有理数を解に持つための必要十分条件は

$$b^2 - 4ac \text{ が平方数}$$

$b = 2, 3, 4, 5, 6$ について, これを満たす ac の値を求める.

(i) $b = 2$ のとき, $ac = 1$ であるから, 次の1組.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

(ii) $b = 3$ のとき, $ac = 2$ であるから, 次の2組.

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

(iii) $b = 4$ のとき, $ac = 3, 4$ であるから, 次の5組.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 0, & \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0, & \quad x^2 - 4x + 4 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0, & \quad \underline{4x^2 - 4x + 1 = 0} \end{aligned}$$

(iv) $b = 5$ のとき, $ac = 4, 6$ であるから, 次の7組.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 = 0, & \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0, & \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0, & \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0, & \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0, \\ \underline{6x^2 - 5x + 1 = 0} \end{aligned}$$

(v) $b = 6$ のとき, $ac = 5, 8, 9$ であるから, 次の5組.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 = 0, & \quad 5x^2 - 6x + 1 = 0, & \quad 2x^2 - 6x + 4 = 0, \\ 4x^2 - 6x + 2 = 0, & \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \end{aligned}$$

2次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が有理数を解にもつのは, (i)~(v) の20組あり, そのうち, 整数解を持たないのは, 次の2組である.

$$4x^2 - 4x + 1 = 0, \quad 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

したがって, 少なくとも1つ整数解を持つのは $20 - 2 = 18$ (組)
 実際, 設問(1)についても, $a = 1$ であるものを数えるとよい. また,
 設問(2)については, 上に示した20個の方程式のうち, とともに整数解
 であるものを確認すればよい. ■