平成 31 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

1 a を実数とし，関数 $f(x) = x^2 + ax - a$ と $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を考える．関数 $y = F(x) - f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ．

2 非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする．P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ と P_{n+1} の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ は

$$x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1})$$
$$y_{n+1} = y_n + k(x_n + x_{n+1})$$

をみたすとする．ただし k を正の実数とする．

(1) $k = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とする．ただし $0 < \alpha < \pi$ とする．このとき P_1，P_2 の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を α を用いて表せ．

(2) P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ を (1) の α と n を用いて表せ．

(3) O を xy 平面の原点とするとき，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を k を用いて表せ．

3 1 つのサイコロを 3 回投げる．1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする．なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

(1) 2 次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ．

(2) 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ のすべての解が整数である確率を求めよ．

(3) 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (t^2+at-a)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-at\right]_0^x=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-ax$

$g(x)=F(x)-f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x)&=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-ax-(x^2+ax-a)\\ &=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2-2ax+a,\\ g'(x)&=x^2+(a-2)x-2a=(x+a)(x-2)\end{aligned}$$

したがって，3 次関数 $y=g(x)$ の極値は

$$\begin{aligned} g(-a)&=\frac{1}{3}(-a)^3+\frac{a-2}{2}\cdot(-a)^2-2a\cdot(-a)+a=\frac{1}{6}a(a^2+6a+6),\\ g(2)&=\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{a-2}{2}\cdot 2^2-2a\cdot 2+a=-a-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$y=g(x)$ のグラフが，x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件は，

$$g(-a)g(2)<0$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}a(a^2+6a+6)\left(-a-\frac{4}{3}\right)&<0\\ a\left(a+\frac{4}{3}\right)(a^2+6a+6)&>0\\ a\left(a+\frac{4}{3}\right)(a+3+\sqrt{3})(a+3-\sqrt{3})&>0\end{aligned}$$

よって，$-3-\sqrt{3}<-\dfrac{4}{3}<-3+\sqrt{3}<0$ に注意して

$$\boldsymbol{a<-3-\sqrt{3},\quad -\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3},\quad 0<a}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた漸化式から

$$x_{n+1}+ky_{n+1}=x_n-ky_n,\quad -kx_{n+1}+y_{n+1}=kx_n+y_n$$

ゆえに
$$x_{n+1}=\frac{1-k^2}{1+k^2}x_n-\frac{2k}{1+k^2}y_n,$$
$$y_{n+1}=\frac{2k}{1+k^2}x_n+\frac{1-k^2}{1+k^2}y_n$$

$k=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ より $\dfrac{1-k^2}{1+k^2}=\cos\alpha$，$\dfrac{2k}{1+k^2}=\sin\alpha$

したがって $(*)\begin{cases} x_{n+1}=x_n\cos\alpha-y_n\sin\alpha \\ y_{n+1}=x_n\sin\alpha+y_n\cos\alpha \end{cases}$

$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned}(x_1,\ y_1)&=\boldsymbol{(\cos\alpha,\ \sin\alpha)},\\ (x_2,\ y_2)&=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\ 2\sin\alpha\cos\alpha)\\ &=\boldsymbol{(\cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha)}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から
$$\begin{cases} x_n=\cos n\alpha, \\ y_n=\sin n\alpha \end{cases}\quad\cdots(\mathrm{A})$$

であると推測し，これを数学的帰納法により示す．

［1］$n=0$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$(*)$ より

$$x_{k+1}=\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha=\cos(k+1)\alpha$$
$$y_{k+1}=\cos k\alpha\sin\alpha+\sin k\alpha\cos\alpha=\sin(k+1)\alpha$$

したがって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］,［2］より，すべての非負の整数 n について，(A) は成立する．

よって $\boldsymbol{x_n=\cos n\alpha,\ \ y_n=\sin n\alpha}$

(3) (2) の結果から，$\mathrm{OP}_n=\mathrm{OP}_{n+1}=1$，$\angle\mathrm{P_nOP_{n+1}}=\alpha$

よって $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k}{1+k^2}=\boldsymbol{\dfrac{k}{1+k^2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha \leqq \beta)$，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = b, \quad \alpha\beta = c$$

上の第 1 式から，解の一方が整数であるとき，他の解も整数である．b，c は 1 から 6 までの整数であるから，条件を満たすのは次の 7 通り．

$c = 1$ のとき　$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 1)$　ゆえに　$b = 2$
$c = 2$ のとき　$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 2)$　ゆえに　$b = 3$
$c = 3$ のとき　$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 3)$　ゆえに　$b = 4$
$c = 4$ のとき　$(\alpha,\ \beta) = (2,\ 2),\ (1,\ 4)$　ゆえに　$b = 4,\ 5$
$c = 5$ のとき　$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 5)$　ゆえに　$b = 6$
$c = 6$ のとき　$(\alpha,\ \beta) = (2,\ 3)$　ゆえに　$b = 5$

よって，求める確率は　$\dfrac{7}{6^2} = \mathbf{\dfrac{7}{36}}$

(2) 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$，すなわち，2 次方程式

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \cdots(*)$$

のすべての解が整数であるから，解と係数の関係により，$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{c}{a}$ は整数で，これらは 1 以上 6 以下の整数であるから，2 次方程式 $(*)$ は，(1) で示した 2 次方程式

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \qquad x^2 - 3x + 2 = 0, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0, \qquad x^2 - 5x + 4 = 0, \qquad x^2 - 6x + 5 = 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

と一致する．すなわち，2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ は，これらと同型 (monic) であるから，上の第 1 式を 2, 3 倍および第 2 式を 2 倍した次の 3 つの 2 次方程式も含む．

$$2x^2 - 4x + 2 = 0, \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0, \quad 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

よって，求める確率は　$\dfrac{7+3}{6^3} = \mathbf{\dfrac{5}{108}}$

(3) 2次方程式

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \cdots (**)$$

が少なくとも1つ整数解をもつとき，$a = 1$ の場合については (1) で調べているので，$a \geqq 2$ の場合について調べる．2次方程式 $(**)$ の解を $p,\ q$ とすると，解と係数の関係により

$$p + q = \frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

このとき，$0 < \dfrac{b}{a} \leqq 3$，$0 < \dfrac{c}{a} \leqq 3$ であるから，整数解は 1 または 2

(i) 方程式 $(**)$ が1を解にもつとき $a + c = b \quad \cdots$①
これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の10組．

a	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
b	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
c	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1

(ii) 方程式 $(**)$ が2を解にもつとき $c = 2(b - 2a) \quad \cdots$②
これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の2組．

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 5,\ 2),\ (2,\ 6,\ 4)$$

(iii) 方程式 $(**)$ が1と2を解にもつ，すなわち，①，② を同時に満たす $(a,\ b,\ c)$ は次の1組である．

$$(a,\ b,\ c) = (2,\ 6,\ 4)$$

よって，求める確率は (1) および (i)〜(iii) により

$$\frac{7 + 10 + 2 - 1}{6^3} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

補足 整数を係数とする 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が有理数を解に持つための必要十分条件は

$$b^2 - 4ac \text{ が平方数}$$

$b = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について，これを満たす ac の値を求める．

(i) $b = 2$ のとき，$ac = 1$ であるから，次の 1 組．

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

(ii) $b = 3$ のとき，$ac = 2$ であるから，次の 2 組．

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \qquad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

(iii) $b = 4$ のとき，$ac = 3,\ 4$ であるから，次の 5 組．

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x^2 - 4x + 4 = 0,$$
$$2x^2 - 4x + 2 = 0, \quad \underline{4x^2 - 4x + 1 = 0}$$

(iv) $b = 5$ のとき，$ac = 4,\ 6$ であるから，次の 7 組．

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0, \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0,$$
$$\underline{6x^2 - 5x + 1 = 0}$$

(v) $b = 6$ のとき，$ac = 5,\ 8,\ 9$ であるから，次の 5 組．

$$x^2 - 6x + 5 = 0, \quad 5x^2 - 6x + 1 = 0, \quad 2x^2 - 6x + 4 = 0,$$
$$4x^2 - 6x + 2 = 0, \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が有理数を解にもつのは，(i)〜(v) の 20 組あり，そのうち，整数解を持たないのは，次の 2 組である．

$$4x^2 - 4x + 1 = 0, \qquad 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

したがって，少なくとも 1 つ整数解を持つのは　$20 - 2 = 18$　(組)

実際，設問 (1) についても，$a = 1$ であるものを数えるとよい．また，設問 (2) については，上に示した 20 個の方程式のうち，ともに整数解であるものを確認すればよい．