平成30年度　名古屋大学　２次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報) 数I・II・A・B

1 a，bを実数とし，少なくとも一方は0でないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 連立不等式

$$3x+2y+4 \geqq 0, \quad x-2y+4 \geqq 0, \quad ax+by \geqq 0$$

の表す領域，または連立不等式

$$3x+2y+4 \geqq 0, \quad x-2y+4 \geqq 0, \quad ax+by \leqq 0$$

の表す領域が三角形であるためにa，bがみたすべき条件を求めよ．さらに，その条件をみたす点$(a,\ b)$の範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) (1)の三角形の面積をSとするとき，Sをa，bを用いて表せ．

(3) $S \geqq 4$を示せ．

2 次の問に答えよ．

(1) 整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数であることを示せ．

(2) nを奇数とする．このとき$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$をみたす整数$\alpha$，$\beta$は存在しないことを示せ．

(3) cを実数とする．このとき3次方程式$x^3-2018x+c=0$の解のうち整数であるものは1個以下であることを示せ．

3 図1のように2つの正方形ABCDとCDEFを並べた図形を考える．2点P，Qが6個の頂点A，B，C，D，E，Fを以下の規則(a)，(b)に従って移動する．

(a) 時刻0では図2のように点Pは頂点Aに，点Qは頂点Cにいる．

(b) 点P，Qは時刻が1増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

時刻nまで2点P，Qが同時に同じ頂点にいることが一度もない確率をp_nと表す．また時刻nまで2点P，Qが同時に同じに頂点にいることが一度もなく，かつ時刻nに2点P，Qがともに同じ正方形上にいる確率をa_nと表し，$b_n = p_n - a_n$と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 時刻1での点P，Qの可能な配置を，図2にならってすべて図示せよ．

(2) a_1，b_1，a_2，b_2を求めよ．

(3) a_{n+1}，b_{n+1}をa_n，b_nで表せ．

(4) $p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$を示せ．

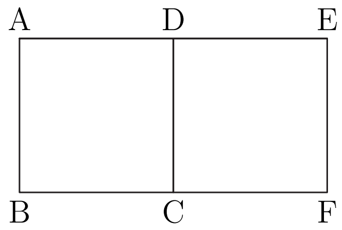


図1

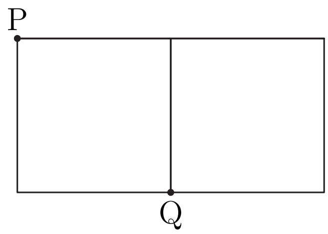
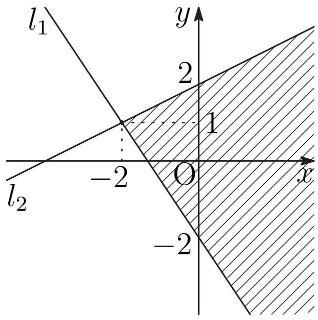


図2

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 連立不等式



$$3x+2y+4 \geqq 0,\quad x-2y+4 \geqq 0$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．
2 直線

$$l_1 : 3x+2y+4=0,\quad l_2 : x-2y+4=0$$

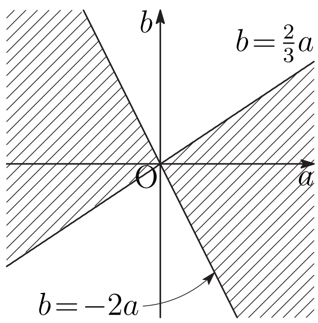
の傾きはそれぞれ $-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ である．

$b \neq 0$ のとき，直線 $l : ax+by=0$ の傾きを m とすると，l によって領域が三角形となるのは

$$(*)\quad m < -\frac{3}{2},\ \ \frac{1}{2} < m \quad \text{すなわち} \quad -\frac{a}{b} < -\frac{3}{2},\ \ \frac{1}{2} < -\frac{a}{b}$$

ゆえに $\quad \dfrac{a}{b} < -\dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{3}{2} < \dfrac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{3}{2}\right) > 0$$



上式より $a \neq 0$ であることに注意して

$$\left(\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{2}{3}\right) < 0 \quad \cdots①$$

したがって $\quad -2 < \dfrac{b}{a} < \dfrac{2}{3}$

$b=0$ のとき，条件より $a \neq 0$ であるから，l は直線 $x=0$ となる．このときも，l により領域は三角形となる．よって，点 $(a,\ b)$ の満たす不等式は

$$-2 < \frac{b}{a} < \frac{3}{2}$$

その領域は，右の図の斜線部分で境界を含まない．

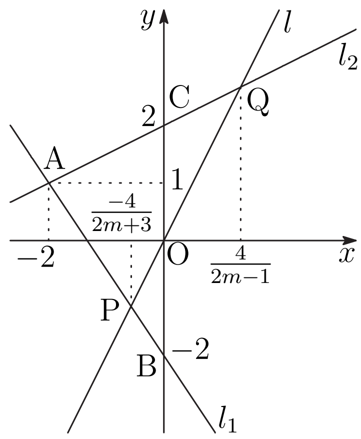
(2) $(*)$ を満たすとき，$l : y = mx$ と

$$l_1 : 3x + 2y + 4 = 0,\quad l_2 : x - 2y + 4 = 0$$

との交点をそれぞれ P，Q とすると，2 点 P，Q の x 座標は，それぞれ

$$-\frac{4}{2m+3},\quad \frac{4}{2m-1}$$

また，l_1 と l_2 の交点 A の x 座標は -2 であり，l_1，l_2 の y 軸との交点をそれぞれ B$(0, -2)$，C$(0,\ 2)$ とすると



$$\triangle \mathrm{ABC} = 4,\quad \triangle \mathrm{OBP} = \frac{4}{|2m+3|},\quad \triangle \mathrm{OCQ} = \frac{4}{|2m-1|}$$

(i) $\dfrac{1}{2} < m$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{APQ} = \triangle \mathrm{ABC} + \triangle \mathrm{OCQ} - \triangle \mathrm{OBP} \\ &= 4 + \frac{4}{|2m-1|} - \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(ii) $m < -\dfrac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{APQ} = \triangle \mathrm{ABC} - \triangle \mathrm{OCQ} + \triangle \mathrm{OBP} \\ &= 4 - \frac{4}{|2m-1|} + \frac{4}{|2m+3|} = 4 + \frac{4}{2m-1} - \frac{4}{2m+3} \end{aligned}$$

(i)，(ii) から，$(*)$ を満たすとき

$$\begin{aligned} S &= 4 + \frac{16}{(2m-1)(2m+3)} = 4 + \frac{16}{\left(-\frac{2a}{b} - 1\right)\left(-\frac{2a}{b} + 3\right)} \\ &= 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)} \end{aligned}$$

$b = 0$ のとき，$l : ax + by = 0$ は，直線 $x = 0$ であるから，$S = \triangle \mathrm{ABC} = 4$ より，上式を満たす．よって

$$\boldsymbol{S = 4 + \frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)}}$$

(3) ① より，$(2a+b)(2a-3b) > 0$ であるから，(2) の結果より　$S \geqq 4$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) α，β の一方が奇数で他方が偶数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2+(\text{奇数})(\text{偶数})+(\text{偶数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

α，β がともに奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の偶奇は

$$(\text{奇数})^2+(\text{奇数})(\text{奇数})+(\text{奇数})^2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{奇数}$$

よって，α，β の少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ は奇数．

(2) $2n$ は偶数であるから

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n \quad \cdots(*)$$

を満たすとき，(1) の結果から，α，β はともに偶数で

$$\alpha=2k, \quad \beta=2l$$

とおくと (k, l は整数)

$$(2k)^2+2k\cdot 2l+(2l)^2=2n \qquad 2(k^2+kl+l^2)=n$$

上の第 2 式の左辺は偶数であるから，n が奇数であることに反する．
よって，$(*)$ を満たす α，β は存在しない．

(3) 3 次方程式

$$x^3-2018x+c=0 \quad \cdots(**)$$

の解を α, β, γ すると (c は実数)，解と係数の関係により

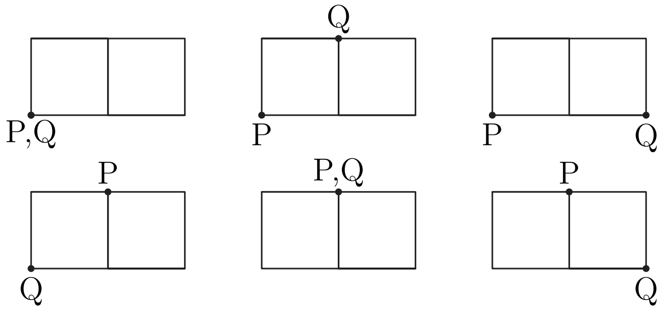
$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018$$

α, β が整数であると仮定し，上の 2 式から γ を消去すると

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2\cdot 1009$$

(2) の結果から，上式を満たす整数 α, β は存在しないので，仮定に反する．
よって，3 次方程式 $(*)$ の整数解の個数は 1 個以下である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 時刻 1 で動点 P，Q の可能な配置は，次の 6 通り



(2) (1) の 6 通りの配置は同様に確からしい．

a_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある，すなわち，

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = (\mathrm{B},\mathrm{D}),\ (\mathrm{D},\mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\mathrm{F})$$

にある確率であるから　$a_1 = \dfrac{3}{6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

b_1 は時刻 1 で動点 P，Q が同じ正方形上にない，すなわち，$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = (\mathrm{B},\mathrm{F})$

にある確率であるから　$b_1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

動点 P，Q が頂点 B，D，F 上にあるのは偶数時刻で，頂点 A，C，E 上にあるのは奇数時刻である．動点 P，Q が時刻 n まで同じ頂点にないという条件を満たしながら時刻 n において，動点 P，Q が同じ正方形上の対角にある確率 a_n，動点 P，Q が A と E または B と F にある確率 b_n について次の確率漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \cdots (*)$$

したがって　$a_2 = \dfrac{1}{2}a_1 + \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{4}b_n}$

(4) $a_0 = 1$，$b_0 = 0$，$(*)$ より，$a_n \geqq 0,\ b_n \geqq 0$ であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

ゆえに　$p_0 = 1$，$p_{n+1} \leqq \dfrac{3}{4}p_n$　よって　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n p_0 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$