# 平成29年度　名古屋大学　2次試験前期日程(数学問題)90分
# 法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報) 数I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a$を正の定数とする．2次関数 $f(x)=ax^2$ と3次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け．

(2) 2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる3点で交わることを示せ．

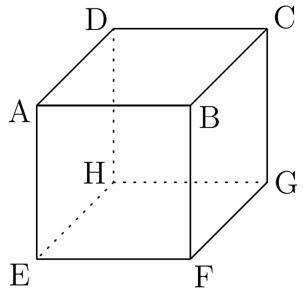
(3) 2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるように $a$ の値を定めよ．またそのとき，2つの曲線の交点の $x$ 座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 下図のような立方体を考える．この立方体の8つの頂点の上を点Pが次の規則で移動する．時刻0では点Pは頂点Aにいる．時刻が1増えるごとに点Pは，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．例えば時刻 $n$ で点Pが頂点Hにいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点D，E，Gのいずれかにいる．自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点Pが時刻 $n$ までの間一度も頂点Aに戻らず，かつ時刻 $n$ で頂点B，D，Eのいずれかにいる確率を $p_n$，(ii) 点Pが時刻 $n$ までの間一度も頂点Aに戻らず，かつ時刻 $n$ で頂点C，F，Hのいずれかにいる確率を $q_n$，(iii) 点Pが時刻 $n$ までの間一度も頂点Aに戻らず，かつ時刻 $n$ で頂点Gにいる確率を $r_n$，とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $p_2$，$q_2$，$r_2$ と $p_3$，$q_3$，$r_3$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$p_n$，$q_n$，$r_n$ を求めよ．

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点Pが時刻 $2m$ で頂点Aに初めて戻る確率 $s_m$ を求めよ．



$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ．

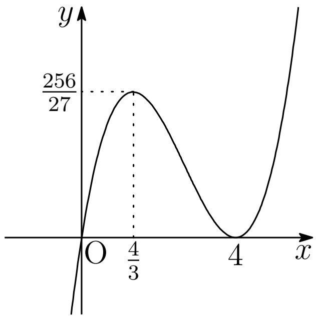
(1) 次の条件 $(*)$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

$$(*)\quad a < b < c \text{ かつ } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \text{ である．}$$

(2) 偶数 $2n$ $(n \geqq 1)$ の 3 つの正の約数 $p$，$q$，$r$ で，$p > q > r$ と $p+q+r=n$ を満たす組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を $f(n)$ とする．ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする．$n$ が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 $M$ を求めよ．また，$f(n)=M$ となる自然数 $n$ の中で最小のものを求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $g(x)=x(x-4)^2=x^3-8x^2+16x$ より




$$g'(x)=3x^2-16x+16$$
$$=(x-4)(3x-4)$$

$g(x)$ の増減表は次のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |

よって　極大値 $g\left(\dfrac{4}{3}\right)=\mathbf{\dfrac{256}{27}}$，　極小値 $g(4)=\mathbf{0}$

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ から $y$ を消去すると

$$ax^2=x(x-4)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x\{x^2-(a+8)x+16\}=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $x^2-(a+8)x+16=0$ の係数について，$a>0$ であるから

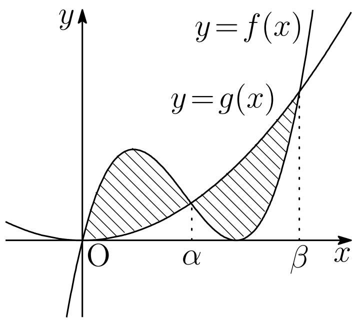
$$D=(a+8)^2-4{\cdot}1{\cdot}16=a(a+16)>0$$

方程式 $x^2-(a+8)x+16=0$ は $0$ でない異なる $2$ つの実数解をもつので，
方程式 $(*)$ は異なる $3$ つの解をもつ．
よって　$y=f(x)$，$y=g(x)$ は相異なる $3$ 点で交わる

(3) (2) の結果から，方程式 $(*)$ の $3$ つの解を $0$，$\alpha$，$\beta$ とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=a+8>0,\quad \alpha\beta=16 \quad \cdots(**) \quad \text{ゆえに} \quad 0<\alpha<\beta$$

条件より




$$\int_0^\alpha \{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^\beta \{g(x)-f(x)\}\,dx=0$

ここで　$g(x)-f(x)=x\{x^2-(a+8)x+16\}$
$=x(x-\alpha)(x-\beta)$
$=-x^2(\beta-x)+\alpha x(\beta-x)$

したがって　$$-\int_0^\beta x^2(\beta-x)\,dx+\alpha\int_0^\beta x(\beta-x)\,dx=0$$
$$-\frac{1}{12}\beta^4+\alpha\cdot\frac{1}{6}\beta^3=0$$
$$\beta=2\alpha$$

これを $(**)$ に代入すると

$$\alpha+2\alpha=a+8,\quad \alpha\cdot 2\alpha=16$$

$\alpha>0$ に注意して　$\alpha=2\sqrt{2}$，$\beta=4\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a=6\sqrt{2}-8}$

2 つの曲線の交点の $x$ 座標は　　$\mathbf{0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}}$

**補足** 次の公式[1]を利用するとよい．

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1=1,\ q_1=0,\ r_1=0$$
$$(*)\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+r_n \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=\mathbf{0},\quad q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\mathbf{\frac{2}{3}},\quad r_2=\frac{1}{3}q_1=\mathbf{0}$$

$(*)$ に $n=2$ を代入すると，上の結果により

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\mathbf{\frac{4}{9}},\quad q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=\mathbf{0},\quad r_3=\frac{1}{3}q_2=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(2) $(*)$ の第 2 式から　$q_{n+2}=\dfrac{2}{3}p_{n+1}+r_{n+1}$

これに $(*)$ の第 1 式，第 3 式を代入すると

$$q_{n+2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{3}q_n \quad \text{すなわち} \quad q_{n+2}=\frac{7}{9}q_n$$

(i) $n$ が奇数のとき $(n\geqq 1)$　$q_n=q_1\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}=0$

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n=0,\quad r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n=0$$

(ii) $n$ が偶数のとき $(n\geqq 2)$　$q_n=q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$
$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(i)，(ii) の結果から

**$n$ が偶数のとき　$\boldsymbol{p_n=0,\ q_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}},\ r_n=0}$**

**$n$ が奇数のとき　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}},\ q_n=0,\ r_n=\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\neq 1)}$**

(3) $s_m=\dfrac{1}{3}p_{2m-1}$ であるから

$$s_1=\frac{1}{3}p_1=\boldsymbol{\frac{1}{3}},$$
$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{(2m-1)-3}{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}}\quad \boldsymbol{(m\geqq 2)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $0 < a < b < c$ より，$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$ であるから

$$\frac{3}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{c} < \frac{1}{2} < \frac{3}{a} \quad \text{すなわち} \quad a < 6 < c$$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > 0$ より　$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$a > 2$

$a$ は自然数であるから　$a = 3,\ 4,\ 5$

(i) $a = 3$ のとき　$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$(b-6)(c-6) = 36$

$b < c$，$c > 6$ に注意して

$$(b-6,\ c-6) = (1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)$$

すなわち　$(b,\ c) = (7,\ 42),\ (8,\ 24),\ (9,\ 18),\ (10,\ 15)$

(ii) $a = 4$ のとき　$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{4}$

ゆえに　$(b-4)(c-4) = 16$

$b < c$，$c > 6$ に注意して

$$(b-4,\ c-4) = (1,\ 16),\ (2,\ 8)$$

すなわち　$(b,\ c) = (5,\ 20),\ (6,\ 12)$

(iii) $a = 5$ のとき　$\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{3}{10}$

ゆえに　$(3b-10)(3c-10) = 100$

$a < b < c$ より，$b \geqq 6$，$c \geqq 7$ であるから，$3b-10 \geqq 8$，$3c-10 \geqq 11$

このとき，自然数 $(b,\ c)$ の組は存在しない．

(i)〜(iii) から

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (3,\ 7,\ 42),\ (3,\ 8,\ 24),\ (3,\ 9,\ 18),\ (3,\ 10,\ 15),}$$
$$\boldsymbol{(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)}$$

(2) $p,\ q,\ r\ (p>q>r)$ は偶数 $2n\ (n \geqq 1)$ の正の約数であるから

$$\frac{2n}{p}=a,\quad \frac{2n}{q}=b,\quad \frac{2n}{r}=c$$

をみたす自然数 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ が存在する．上式より

$$p=\frac{2n}{a},\quad q=\frac{2n}{b},\quad r=\frac{2n}{c}\qquad \cdots(*)$$

$p+q+r=n$ より

$$\frac{2n}{a}+\frac{2n}{b}+\frac{2n}{c}=n\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

上式を満たす自然数 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ の組は (1) の結果である．
これらの自然数の組を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}(p,\ q,\ r)=\ &\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{7},\ \frac{2n}{42}\right),\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{8},\ \frac{2n}{24}\right),\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{9},\ \frac{2n}{18}\right),\\ &\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{10},\ \frac{2n}{15}\right),\left(\frac{2n}{4},\ \frac{2n}{5},\ \frac{2n}{20}\right),\left(\frac{2n}{4},\ \frac{2n}{6},\ \frac{2n}{12}\right)\end{aligned}$$

$p$，$q$，$r$ が自然数となるのは，$n$ がそれぞれ 21，12，9，15，10，6 の倍数のときである．とくに

$$21=3\cdot7,\quad 12=2^2\cdot3,\quad 9=3^2,\quad 15=3\cdot5,\quad 10=2\cdot5,\quad 6=2\cdot3$$

の最小公倍数が $2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7\ =\ 1260$ であるから，$n$ が 1260 の倍数のとき，$f(n)$ は最大値 6 をとる．よって　$\boldsymbol{M=6}$，最小の $n$ は **1260**