

平成28年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

- 1 曲線 $y = x^2$ 上に2点 $A(-1, 1)$, $B(b, b^2)$ をとる. ただし $b > -1$ とする. このとき, 次の条件を満たす b の範囲を求めよ.

条件: $y = x^2$ 上の点 $T(t, t^2)$ ($-1 < t < b$) で, $\angle ATB$ が直角になるものが存在する.

- 2 n を正の整数とし, k を $1 \leq k \leq n+2$ を満たす整数とする. $n+2$ 枚のカードがあり, そのうちの1枚には数字0が, 他の1枚には数字2が, 残りの n 枚には数字1が書かれている. この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が1以上になる確率を求めよ.
- (2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が2となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ.
- (3) 与えられた n に対して, 確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と, その最大値を求めよ.

- 3 正の整数 n に対して, その(1と自分自身を含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ と書くことにする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) k を正の整数, p を3以上の素数とするとき, $s(2^k p)$ を求めよ.
- (2) $s(2016)$ を求めよ.
- (3) 2016の正の約数 n で, $s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \text{ 直線 AT の傾きは } \frac{t^2 - 1}{t + 1} = t - 1, \quad \text{直線 BT の傾きは } \frac{t^2 - b^2}{t - b} = t + b$$

∠ATB が直角であるから

$$(t - 1)(t + b) = -1 \quad \text{整理すると} \quad t^2 + (b - 1)t - b + 1 = 0 \quad \dots (*)$$

方程式 (*) が, $-1 < t < b$ に解をもつ条件を求めればよい. ここで

$$f(t) = t^2 + (b - 1)t - b + 1 = \left(t + \frac{b - 1}{2}\right)^2 - \frac{(b + 3)(b - 1)}{4} \quad (-1 \leq t \leq b)$$

の最大値を M , 最小値を m とすると

$$M = \begin{cases} f(-1) & (-1 < b < 1) \\ f(b) & (1 \leq b) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} f(b) & (-1 < b < \frac{1}{3}) \\ f(\frac{1-b}{2}) & (\frac{1}{3} \leq b \leq 3) \\ f(-1) & (3 < b) \end{cases}$$

$$f(-1) = -2b + 3, \quad f(b) = 2b^2 - 2b + 1, \quad f\left(\frac{1-b}{2}\right) = -\frac{(b+3)(b-1)}{4}$$

方程式 (*) が $-1 < t < b$ に解をもつことから

$$(i) \quad -1 < b < \frac{1}{3} \text{ のとき} \quad \begin{cases} -2b + 3 > 0 \\ 2b^2 - 2b + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに 解なし}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{3} \leq b < 1 \text{ のとき} \quad \begin{cases} -2b + 3 > 0 \\ -\frac{(b+3)(b-1)}{4} \leq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに 解なし}$$

$$(iii) \quad 1 \leq b \leq 3 \text{ のとき} \quad \begin{cases} 2b^2 - 2b + 1 > 0 \\ -\frac{(b+3)(b-1)}{4} \leq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに } 1 \leq b \leq 3$$

$$(iv) \quad 3 < b \text{ のとき} \quad \begin{cases} 2b^2 - 2b + 1 > 0 \\ -2b + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに } 3 < b$$

$$(i) \sim (iv) \text{ より} \quad \mathbf{b \geq 1}$$

別解 直線 AT の傾きは $\frac{t^2 - 1}{t + 1} = t - 1$, 直線 BT の傾きは $\frac{t^2 - b^2}{t - b} = t + b$

∠ATB が直角であるから

$$(t - 1)(t + b) = -1 \quad \text{整理すると} \quad t^2 + (b - 1)t - b + 1 = 0 \quad \dots (*)$$

方程式 (*) は, 実数解をもつから

$$(b - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b + 1) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b + 3)(b - 1) \geq 0$$

$b > -1$ に注意すると, $b \geq 1$ の範囲について調べればよい.

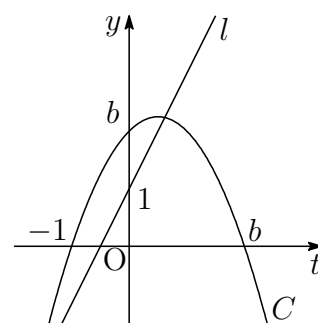
(*) を変形すると $2(b - 1)t + 1 = -(t + 1)(t - b)$

直線 $l: y = 2(b - 1)t + 1$ と放物線 $C: y = -(t + 1)(t - b)$ が $-1 < t < b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい.

$b \geq 1$ のとき, C と l は共有点を持つ.

とくに, $b = 1$ のとき, C と l は, $t = 0$ で接する.

$b > 1$ のとき, C および l が y 軸とそれぞれ $b, 1$ で交わるので, このとき, C と l は常に $-1 < t < b$ に共有点をもつ. よって $b \geq 1$



2 (1) 0以外の $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出す場合の確率であるから

$$\frac{{}_{n+1}C_k}{{}_{n+2}C_k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{n+2-k}{n+2}$$

(2) 2のカードを1枚, 1のカードを $k-1$ 枚取り出す場合の確率であるから

$$\begin{aligned} Q_n(k) &= \frac{1 \cdot {}_n C_{k-1}}{{}_{n+2} C_k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果から $Q_n(k) = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(k - \frac{n+2}{2}\right)^2 + \frac{n+2}{4(n+1)}$

(i) n が偶数のとき, $k = \frac{n+2}{2}$ で, 最大値 $\frac{n+2}{4(n+1)}$

(ii) n が奇数のとき, $k = \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}$ で,

$$\text{最大値} -\frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{n+2}{4(n+1)} = \frac{n+3}{4(n+2)}$$

別解 (2)の結果から

$$\frac{Q_n(k+1)}{Q_n(k)} - 1 = \frac{(k+1)(n+1-k)}{k(n+2-k)} - 1 = \frac{n+1-2k}{k(n+2-k)}$$

(i) n が偶数のとき

$$Q_n(1) < Q_n(2) < \cdots < Q_n\left(\frac{n}{2}\right) < Q_n\left(\frac{n+2}{2}\right) > \cdots > Q_n(n+2)$$

$$\text{よって 最大値 } Q_n\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{n+2}{4(n+1)}$$

(ii) n が奇数のとき

$$Q_n(1) < Q_n(2) < \cdots < Q_n\left(\frac{n+1}{2}\right) = Q_n\left(\frac{n+3}{2}\right) > \cdots > Q_n(n+2)$$

$$\text{よって 最大値 } Q_n\left(\frac{n+1}{2}\right) = Q_n\left(\frac{n+3}{2}\right) = \frac{n+3}{4(n+2)}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad s(2^k p) = (1 + 2 + \cdots + 2^k)(1 + p) \\ = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1}(1 + p) = (2^{k+1} - 1)(p + 1)$$

$$(2) \quad 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} s(2016) &= s(2^5)s(3^2)s(7) \\ &= \frac{2^6 - 1}{2 - 1}(1 + 3 + 3^2)(1 + 7) \\ &= 63 \cdot 13 \cdot 8 = \mathbf{6552} \end{aligned}$$

(3) n は 2016 の正の約数であるから

$$n = 2^i \cdot 3^j \cdot 7^k \quad (0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 1)$$

とおくと, $s(n) = 2016$ となるとき

$$s(2^i)s(3^j)s(7^k) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \dots (*)$$

ここで

$s(2^0) = 1$	$s(3^0) = 1$	$s(7^0) = 1$
$s(2^1) = 3$	$s(3^1) = 2^2$	$s(7^1) = 2^3$
$s(2^2) = 7$	$s(3^2) = 13$	
$s(2^3) = 3 \cdot 5$		
$s(2^4) = 31$		
$s(2^5) = 3^2 \cdot 7$		

(*) の $3^2 \cdot 7$ に注目すると $i = 5$

さらに, 2^5 に注目すると $j = k = 1$

よって $n = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = \mathbf{672}$