平成28年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 曲線 $y = x^2$ 上に2点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる．ただし $b > -1$ とする．このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ．

条件：$y = x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1 < t < b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する．

2 n を正の整数とし，k を $1 \leqq k \leqq n+2$ を満たす整数とする．$n+2$ 枚のカードがあり，そのうちの1枚には数字0が，他の1枚には数字2が，残りの n 枚には数字1が書かれている．この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が1以上になる確率を求めよ．

(2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が2となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ．

(3) 与えられた n に対して，確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と，その最大値を求めよ．

3 正の整数 n に対して，その (1と自分自身を含めた) すべての正の約数の和を $s(n)$ と書くことにする．このとき，次の問に答えよ．

(1) k を正の整数，p を3以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ．

(2) $s(2016)$ を求めよ．

(3) 2016の正の約数 n で，$s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-1}{t+1}=t-1,$ 　　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

∠ATB が直角であるから

$$(t-1)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-1)t-b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ が，$-1<t<b$ に解をもつ条件を求めればよい．ここで

$$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\frac{b-1}{2}\right)^2-\frac{(b+3)(b-1)}{4} \quad (-1 \leqq t \leqq b)$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M=\begin{cases} f(-1) & (-1<b<1) \\ f(b) & (1 \leqq b) \end{cases}, \quad m=\begin{cases} f(b) & (-1<b<\frac{1}{3}) \\ f\left(\frac{1-b}{2}\right) & (\frac{1}{3} \leqq b \leqq 3) \\ f(-1) & (3<b) \end{cases}$$

$$f(-1)=-2b+3, \quad f(b)=2b^2-2b+1, \quad f\left(\frac{1-b}{2}\right)=-\frac{(b+3)(b-1)}{4}$$

方程式 $(*)$ が $-1<t<b$ に解をもつことから

(i) $-1<b<\dfrac{1}{3}$ のとき $\begin{cases} -2b+3>0 \\ 2b^2-2b+1<0 \end{cases}$ 　ゆえに　解なし

(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq b<1$ のとき $\begin{cases} -2b+3>0 \\ -\dfrac{(b+3)(b-1)}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに　解なし

(iii) $1 \leqq b \leqq 3$ のとき $\begin{cases} 2b^2-2b+1>0 \\ -\dfrac{(b+3)(b-1)}{4} \leqq 0 \end{cases}$ 　ゆえに　$1 \leqq b \leqq 3$

(iv) $3<b$ のとき $\begin{cases} 2b^2-2b+1>0 \\ -2b+3<0 \end{cases}$ 　ゆえに　$3<b$

(i)〜(iv) より　　$\boldsymbol{b \geqq 1}$

別解 直線 AT の傾きは $\dfrac{t^2-1}{t+1}=t-1,$ 　　直線 BT の傾きは $\dfrac{t^2-b^2}{t-b}=t+b$

$\angle$ATB が直角であるから

$$(t-1)(t+b)=-1 \quad \text{整理すると} \quad t^2+(b-1)t-b+1=0 \quad \cdots(*)$$

方程式 $(*)$ は，実数解をもつから

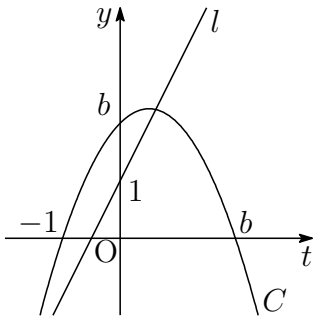
$$(b-1)^2-4\cdot 1(-b+1)\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b+3)(b-1)\geqq 0$$

$b>-1$ に注意すると，$b\geqq 1$ の範囲について調べればよい．

$(*)$ を変形すると　　$2(b-1)t+1=-(t+1)(t-b)$

直線 $l: y=2(b-1)t+1$ と放物線 $C: y=-(t+1)(t-b)$ が $-1<t<b$ で共有点をもつ b の値の範囲を求めればよい．

$b\geqq 1$ のとき，C と l は共有点を持つ．
とくに，$b=1$ のとき，C と l は，$t=0$ で接する．
$b>1$ のとき，C および l が y 軸とそれぞれ b，1 で交わるので，このとき，C と l は常に $-1<t<b$ に共有点をもつ．よって　$\boldsymbol{b\geqq 1}$



2 (1) 0 以外の $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出す場合の確率であるから

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!}=\boldsymbol{\frac{n+2-k}{n+2}}$$

(2) 2 のカードを 1 枚，1 のカードを $k-1$ 枚取り出す場合の確率であるから

$$\begin{aligned}Q_n(k)&=\frac{1\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!}\\&=\boldsymbol{\frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$Q_n(k)=-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(k-\dfrac{n+2}{2}\right)^2+\dfrac{n+2}{4(n+1)}$

(i) n が偶数のとき，$\boldsymbol{k=\dfrac{n+2}{2}}$ で，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{n+2}{4(n+1)}}$

(ii) n が奇数のとき，$\boldsymbol{k=\dfrac{n+1}{2},\ \dfrac{n+3}{2}}$ で，

最大値 $-\dfrac{1}{4(n+1)(n+2)}+\dfrac{n+2}{4(n+1)}=\boldsymbol{\dfrac{n+3}{4(n+2)}}$

別解 (2) の結果から

$$\frac{Q_n(k+1)}{Q_n(k)}-1=\frac{(k+1)(n+1-k)}{k(n+2-k)}-1=\frac{n+1-2k}{k(n+2-k)}$$

(i) n が偶数のとき

$$Q_n(1)<Q_n(2)<\cdots<Q_n(\tfrac{n}{2})<Q_n(\tfrac{n+2}{2})>\cdots>Q_n(n+2)$$

よって　最大値 $Q_n\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\dfrac{n+2}{4(n+1)}$

(ii) n が奇数のとき

$$Q_n(1)<Q_n(2)<\cdots<Q_n(\tfrac{n+1}{2})=Q_n(\tfrac{n+3}{2})>\cdots>Q_n(n+2)$$

よって　最大値 $Q_n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)=Q_n\left(\dfrac{n+3}{2}\right)=\dfrac{n+3}{4(n+2)}$ ■

3 (1) $s(2^k p) = (1+2+\cdots+2^k)(1+p)$

$$= \frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p) = \boldsymbol{(2^{k+1}-1)(p+1)}$$

(2) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ より

$$\begin{aligned} s(2016) &= s(2^5)s(3^2)s(7) \\ &= \frac{2^6-1}{2-1}(1+3+3^2)(1+7) \\ &= 63 \cdot 13 \cdot 8 = \mathbf{6552} \end{aligned}$$

(3) n は 2016 の正の約数であるから

$$n = 2^i \cdot 3^j \cdot 7^k \quad (0 \leqq i \leqq 5,\ 0 \leqq j \leqq 2,\ 0 \leqq k \leqq 1)$$

とおくと，$s(n) = 2016$ となるとき

$$s(2^i)s(3^j)s(7^k) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \cdots (*)$$

ここで

$s(2^0) = 1$	$s(3^0) = 1$	$s(7^0) = 1$
$s(2^1) = 3$	$s(3^1) = 2^2$	$s(7^1) = 2^3$
$s(2^2) = 7$	$s(3^2) = 13$	
$s(2^3) = 3 \cdot 5$		
$s(2^4) = 31$		
$s(2^5) = 3^2 \cdot 7$		

$(*)$ の $3^2 \cdot 7$ に注目すると　$i = 5$

さらに，2^5 に注目すると　$j = k = 1$

よって　$n = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = \mathbf{672}$ ■