

平成27年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 座標平面上の円 $C: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ と, x 軸上の2点 $P(-a, 0)$, $Q(b, 0)$ を考える. ただし, $a > 0$, $b > 0$, $ab \neq 1$ とする. 点 P , Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き, その2つの接線の交点を R とする. このとき, 次の間に答えよ.

- (1) 直線 QR の方程式を求めよ.
- (2) R の座標を a , b で表せ.
- (3) R の y 座標が正であるとき, $\triangle PQR$ の周の長さを T とする. T を a , b で表せ.
- (4) 2点 P , Q が, 条件「 $PQ = 4$ であり, R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき, T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ.

2 数直線上にある1, 2, 3, 4, 5の5つの点と1つの石を考える. 石がいずれかの点にあるとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{石が点1にあるならば, 確率1で点2に移動する} \\ \text{石が点 } k \ (k = 2, 3, 4) \text{ にあるならば,} \\ \quad \text{確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点5にあるならば, 確率1で4に移動する} \end{array} \right.$$

という試行を行う. 石が点1にある状態から始め, この試行を繰り返す. 試行を n 回繰り返した後に, 石が点 k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) にある確率を $P_n(k)$ とするとき, 次の間に答えよ.

- (1) $n = 6$ のときの確率 $P_6(k)$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) をそれぞれ求めよ.
- (2) 石が移動した先の点に印をつける(点1には初めから印がついているものとする). 試行を6回繰り返した後に, 5つの点全てに印がついている確率を求めよ.
- (3) $n \geq 1$ のとき, $P_n(3)$ を求めよ.

3 次の問に答えよ.

(1) $(\sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}})^2$ を計算し, 2重根号を用いない形で表せ.

(2) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき, 整数係数の4次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち, x^4 の係数が1であるものを求めよ.

(3) 8つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし, 複号 \pm はすべての可能性にわたる)の中で, (2)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求めよ.

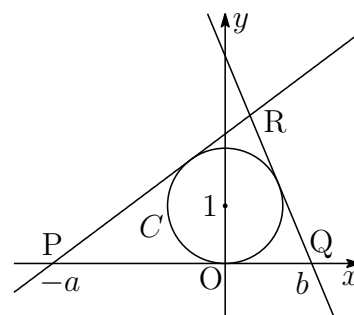
解答例

1 (1) 点 $Q(b, 0)$ を通り ($b \neq 1$), 傾き m の直線は

$$y = m(x - b) \quad \text{ゆえに} \quad mx - y - bm = 0$$

これが円 $C: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ と接するから

$$\frac{|-1 - bm|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$



平方して整理すると $m\{(b^2 - 1)m + 2b\} = 0$

$m \neq 0$ であるから $m = \frac{2b}{1 - b^2}$

したがって, 直線 QR の方程式は $y = \frac{2b}{1 - b^2}(x - b)$

よって, $b = 1$ のときも成立することに注意して

$$2bx + (b^2 - 1)y - 2b^2 = 0$$

(2) (1) の結果から直線 PR の方程式は $-2ax + (a^2 - 1)y - 2a^2 = 0$
 点 R の座標は, 次の連立方程式の解である.

$$\begin{cases} -2ax + (a^2 - 1)y - 2a^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ 2bx + (b^2 - 1)y - 2b^2 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② より $-2(a + b)x + (a^2 - b^2)y - 2(a^2 - b^2) = 0$
 $(a + b)\{-2x + (a - b)y - 2(a - b)\} = 0$

$a + b \neq 0$ であるから $2x = (a - b)(y - 2) \quad \dots \textcircled{3}$

②, ③ から x を消去して, 整理すると

$$\begin{aligned} b(a - b)(y - 2) + (b^2 - 1)y - 2b^2 &= 0 \\ (ab - 1)y - 2ab &= 0 \end{aligned}$$

$ab \neq 1$ であるから $y = \frac{2ab}{ab - 1}$ これを ③ に代入して

$$2x = (a - b) \left(\frac{2ab}{ab - 1} - 2 \right) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a - b}{ab - 1}$$

よって, 点 R の座標は $\left(\frac{a - b}{ab - 1}, \frac{2ab}{ab - 1} \right)$

(3) $\triangle PQR$ の面積は, PQ の長さ と 点 R の y 座標 により

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{2ab}{ab-1} = \frac{ab(a+b)}{ab-1}$$

また, $\triangle PQR$ の面積は, T と $\triangle PQR$ の内接円の半径により

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot T \cdot 1 = \frac{T}{2}$$

$$\text{したがって } \frac{T}{2} = \frac{ab(a+b)}{ab-1} \quad \text{よって } T = \frac{2ab(a+b)}{ab-1}$$

(4) R の y 座標は, 正であるから $\frac{2ab}{ab-1} > 0$

$a, b > 0$ であるから $ab > 1$

正の 2 数 a, b の相加平均・相乗平均の関係により $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a+b=4$ であるから $2 \geq \sqrt{ab}$ すなわち $1 < ab \leq 4$

$$\begin{aligned} T &= \frac{8ab}{ab-1} = \frac{8(ab-1)+8}{ab-1} = 8 + \frac{8}{ab-1} \\ &\geq 8 + \frac{8}{4-1} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

上式で等号が成立するのは, $a=b$, すなわち, $a=b=2$

よって, T は $a=2$ のとき, 最小値 $\frac{32}{3}$ をとる. ■

2 (1) n が奇数のとき $P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$

n が偶数のとき $P_n(2) = P_n(4) = 0$

n が奇数のとき, 石は点 2 または 4 にある. このとき

$$P_{2j+1}(2) = p_{2j-1}(2) \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

したがって, j を自然数とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$P_1(2) = 1, P_1(4) = 0$$

$$(*) \begin{cases} P_{2j+1}(2) = \frac{3}{4}P_{2j-1}(2) + \frac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4) = \frac{1}{4}P_{2j-1}(2) + \frac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

(*) に $j = 1$ を代入すると

$$P_3(2) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}, \quad P_3(4) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}$$

さらに, (*) に $j = 2$ を代入すると

$$P_5(2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}, \quad P_5(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1) = P_5(2) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$P_6(3) = P_5(2) \times \frac{1}{2} + P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_6(5) = P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$P_6(2) = P_6(4) = 0$$

(2) 4回繰り返した後に、点5、点3にある確率は

$$P_4(5) = P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P_4(3) = P_3(2) \times \frac{1}{2} + P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって、6回繰り返した後に、5つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5) + P_4(3) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(3) (*) の辺々を加えると

$$P_{2j+1}(2) + P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4) &= P_1(2) + P_1(4) \\ &= 1 + 0 = 1 \quad (j \geq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad P_{2j}(3) &= P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)\} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad P_n(3) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

$$\text{補足 (*) を解くと}^1 \quad P_{2j-1}(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^j}, \quad P_{2j-1}(4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^j}$$

$$\text{ゆえに} \quad P_{2j}(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{j+1}}, \quad P_{2j}(3) = \frac{1}{2}, \quad P_{2j}(5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{j+1}} \quad \blacksquare$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Ndai/Ndai_ri.2015.pdf [4] 参照

- 3** (1) $p = \sqrt{9 + 2\sqrt{17}}$, $q = \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2 + q^2 = 18, \quad pq = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \left(\sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} \right)^2 &= (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \\ &= 18 + 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

- (2) $\alpha = pq + p + q$ であるから

$$(\alpha - pq)^2 = (p + q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 - 2pq\alpha + (pq)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

$$\text{したがって} \quad \alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$$

$$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2 - 5)^2 = 52(\alpha + 1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

$$\text{よって} \quad f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27$$

- (3) (1) の式変形に注意すると, $f(x) = 0$ は $(x^2 - 5)^2 = 52(x + 1)^2$

- (i) $x^2 - 5 = 2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 - 2\sqrt{13}x + 13 = 18 + 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x - pq)^2 = (p + q)^2$$

$$\text{したがって} \quad x - pq = \pm(p + q) \quad \text{すなわち} \quad x = pq + p + q, \quad pq - p - q$$

- (ii) $x^2 - 5 = -2\sqrt{13}(x + 1)$ のとき

$$x^2 + 2\sqrt{13}x + 13 = 18 - 2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x + pq)^2 = (p - q)^2$$

$$\text{したがって} \quad x + pq = \pm(p - q) \quad \text{すなわち} \quad x = -pq + p - q, \quad -pq - p + q$$

- (i), (ii) から, $f(x) = 0$ の解は

$$\begin{aligned} &\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ &\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ &-\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}, \\ &-\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

