平成 27 年度　名古屋大学　２次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

1 座標平面上の円 $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と，x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(-a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(b,\ 0)$ を考える．ただし，$a > 0$，$b > 0$，$ab \neq 1$ とする．点 P，Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 QR の方程式を求めよ．

(2) R の座標を a，b で表せ．

(3) R の y 座標が正であるとき，△PQR の周の長さを T とする．T を a，b で表せ．

(4) 2 点 P，Q が，条件「PQ $= 4$ であり，R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ．

2 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 } 1 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で点 } 2 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k = 2, 3, 4) \text{ にあるならば，} \\ \qquad \text{確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k-1 \text{ に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } 5 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で } 4 \text{ に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す．試行を n 回繰り返した後に，石が点 k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ にある確率を $P_n(k)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $n = 6$ のときの確率 $P_6(k)$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 石が移動した先の点に印をつける (点 1 には初めから印がついているものとする)．試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点全てに印がついている確率を求めよ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，$P_n(3)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ．

(1) $\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し，2 重根号を用いない形で表せ．

(2) $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ．

(3) 8 つの実数

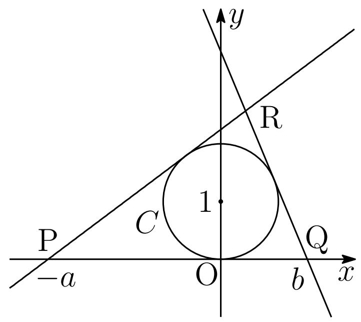
$$\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

(ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で，(2) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 点 Q$(b,\ 0)$ を通り $(b \neq 1)$，傾き m の直線は

$$y = m(x-b) \quad \text{ゆえに} \quad mx - y - bm = 0$$



これが円 $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と接するから

$$\frac{|-1-bm|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

平方して整理すると $\quad m\{(b^2-1)m + 2b\} = 0$

$m \neq 0$ であるから $\quad m = \dfrac{2b}{1-b^2}$

したがって，直線 QR の方程式は $\quad y = \dfrac{2b}{1-b^2}(x-b)$

よって，$b = 1$ のときも成立することに注意して

$$\boldsymbol{2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0}$$

(2) (1) の結果から直線 PR の方程式は $\quad -2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0$

点 R の座標は，次の連立方程式の解である．

$$\begin{cases} -2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0 & \cdots ① \\ \quad 2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より $\quad -2(a+b)x + (a^2-b^2)y - 2(a^2-b^2) = 0$

$$(a+b)\{-2x + (a-b)y - 2(a-b)\} = 0$$

$a + b \neq 0$ であるから $\quad 2x = (a-b)(y-2) \quad \cdots ③$

②，③ から x を消去して，整理すると

$$b(a-b)(y-2) + (b^2-1)y - 2b^2 = 0$$
$$(ab-1)y - 2ab = 0$$

$ab \neq 1$ であるから $\quad y = \dfrac{2ab}{ab-1} \quad$ これを ③ に代入して

$$2x = (a-b)\left(\frac{2ab}{ab-1} - 2\right) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a-b}{ab-1}$$

よって，点 R の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\right)}$

(3) $\triangle$PQR の面積は，PQ の長さと点 R の y 座標により

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{2ab}{ab-1}=\frac{ab(a+b)}{ab-1}$$

また，$\triangle$PQR の面積は，T と $\triangle$PQR の内接円の半径により

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot T\cdot 1=\frac{T}{2}$$

したがって　$\dfrac{T}{2}=\dfrac{ab(a+b)}{ab-1}$　　よって　$\boldsymbol{T=\dfrac{2ab(a+b)}{ab-1}}$

(4) R の y 座標は，正であるから　　$\dfrac{2ab}{ab-1}>0$

$a,\ b>0$ であるから　　$ab>1$

正の 2 数 a，b の相加平均・相乗平均の関係により　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

$a+b=4$ であるから　$2\geqq\sqrt{ab}$　すなわち　$1<ab\leqq 4$

$$\begin{aligned}T&=\frac{8ab}{ab-1}=\frac{8(ab-1)+8}{ab-1}=8+\frac{8}{ab-1}\\&\geqq 8+\frac{8}{4-1}=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

上式で等号が成立するのは，$a=b$，すなわち，$a=b=2$

よって，T は $\boldsymbol{a=2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{32}{3}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) n が奇数のとき　$P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$

n が偶数のとき　$P_n(2) = P_n(4) = 0$

n が奇数のとき，石は点 2 または 4 にある．このとき

$$P_{2j+1}(2) = p_{2j-1}(2) \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

したがって，j を自然数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$P_1(2) = 1,\ P_1(4) = 0$$
$$(*)\begin{cases} P_{2j+1}(2) = \dfrac{3}{4}P_{2j-1}(2) + \dfrac{1}{4}P_{2j-1}(4) \\ P_{2j+1}(4) = \dfrac{1}{4}P_{2j-1}(2) + \dfrac{3}{4}P_{2j-1}(4) \end{cases}$$

$(*)$ に $j = 1$ を代入すると

$$P_3(2) = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{3}{4}, \quad P_3(4) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 0 = \frac{1}{4}$$

さらに，$(*)$ に $j = 2$ を代入すると

$$P_5(2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8}, \quad P_5(4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

したがって

$$P_6(1) = P_5(2) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{16}}$$
$$P_6(3) = P_5(2) \times \frac{1}{2} + P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P_6(5) = P_5(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{16}}$$
$$P_6(2) = P_6(4) = \mathbf{0}$$

(2) 4 回繰り返した後に，点 5，点 3 にある確率は

$$P_4(5) = P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$P_4(3) = P_3(2) \times \frac{1}{2} + P_3(4) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって，6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がつく確率は

$$P_4(5) + P_4(3) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) $(*)$ の辺々を加えると

$$P_{2j+1}(2) + P_{2j+1}(4) = P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)$$

ゆえに
$$\begin{aligned} P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4) &= P_1(2) + P_1(4) \\ &= 1 + 0 = 1 \quad (j \geqq 1) \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} P_{2j}(3) &= P_{2j-1}(2) \times \frac{1}{2} + P_{2j-1}(4) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{P_{2j-1}(2) + P_{2j-1}(4)\} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって
$$\boldsymbol{P_n(3) = \begin{cases} 0 & (n\ \text{が奇数}) \\ \dfrac{1}{2} & (n\ \text{が偶数}) \end{cases}}$$

補足 $(*)$ を解くと[1]　$P_{2j-1}(2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^j}$，$P_{2j-1}(4) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^j}$

ゆえに　$P_{2j}(1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{j+1}}$，$P_{2j}(3) = \dfrac{1}{2}$，$P_{2j}(5) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^{j+1}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Ndai/Ndai_ri_2015.pdf $\boxed{4}$ 参照

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $p=\sqrt{9+2\sqrt{17}}$，$q=\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおくと

$$p^2+q^2=18, \quad pq=\sqrt{13}$$

よって
$$\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2=(p+q)^2=p^2+q^2+2pq$$
$$=\mathbf{18+2\sqrt{13}}$$

(2) $\alpha=pq+p+q$ であるから

$$(\alpha-pq)^2=(p+q)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2-2pq\alpha+(pq)^2=p^2+q^2+2pq$$

したがって
$$\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$$
$$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$$

この両辺を平方すると

$$(\alpha^2-5)^2=52(\alpha+1)^2 \quad \text{すなわち} \quad \alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって
$$\boldsymbol{f(x)=x^4-62x^2-104x-27}$$

(3) (1) の式変形に注意すると，$f(x)=0$ は $(x^2-5)^2=52(x+1)^2$

(i) $x^2-5=2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2-2\sqrt{13}x+13=18+2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x-pq)^2=(p+q)^2$$

したがって $x-pq=\pm(p+q)$ すなわち $x=pq+p+q,\ pq-p-q$

(ii) $x^2-5=-2\sqrt{13}(x+1)$ のとき

$$x^2+2\sqrt{13}x+13=18-2\sqrt{13} \quad \text{ゆえに} \quad (x+pq)^2=(p-q)^2$$

したがって $x+pq=\pm(p-q)$ すなわち $x=-pq+p-q, -pq-p+q$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ の解は

$$\mathbf{\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}},$$
$$\mathbf{\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},$$
$$\mathbf{-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}},$$
$$\mathbf{-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}}$$